

北京航空航天大学宇航学院

---

# 《制导与控制原理》期末复习材料

---

张冉

办公室：国实D823



# 开环制导 (大气层内上升段飞行程序设计)

张冉  
自主系统与飞行控制实验室  
北京航空航天大学宇航学院

2023 春

## 目录

- 开环制导
- 火箭运动方程简化
- 火箭运动特性分析
- 飞行程序设计

- 开环制导
- 火箭运动方程简化
- 火箭运动特性分析
- 飞行程序设计

## 大气层内上升段飞行

4



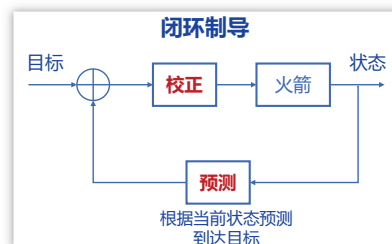
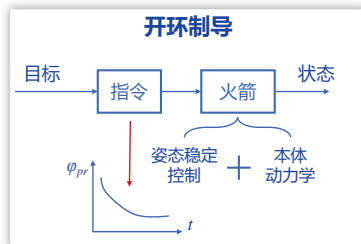
问天实验舱搭乘长征五号B发射升空

## 什么是开环制导?

5

### □ 制导 (Guidance)

导引和控制 (“导”) 飞行器按一定规律 (“制”) 飞向目标或预定轨道的技术和方法



□ 开环制导的关键是设计合理的飞行程序

## 目录

- 开环制导
- 火箭运动方程简化
- 火箭运动特性分析
- 飞行程序设计

质心运动方程中变量定义

变量	含义	变量	含义	变量	含义
$r$	质心位置	$g_r$	质心位置方向引力加速度	$m$	火箭质量
$v_l$	质心对地速度	$g_\phi$	当地拟水平面北向引力加速度	$\phi$	地心纬度
$F_p$	推力	$\theta$	速度倾角	$a$	速度坐标系
$F_A$	气动力	$\sigma$	航迹偏航角	$b$	箭体坐标系
$g$	引力加速度	$\nu$	倾侧角	$l$	发射坐标系
$\omega_E$	地球自转角速度	$\alpha$	攻角	$R$	坐标系转换矩阵
$v$	相对发射点速度大小	$\beta$	侧滑角	$x$	发射系x轴
$r_l$	质心对发射点位置	$\delta_\phi$	发动机俯仰摆角	$y$	发射系y轴
$r_{ol}$	发射点对地心位置	$\delta_\psi$	发动机偏航摆角	$z$	发射系z轴
$C_{DqS_M}$	气动阻力D	$C_{LqS_M}$	气动升力L	$C_{CqS_M}$	气动侧向力C

火箭质心运动方程 (3)

发射坐标系下的运动学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{al}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\sigma) \cos(\theta) \\ v \cos(\sigma) \sin(\theta) \\ -v \sin(\sigma) \end{bmatrix}$$

质心运动方程坐标转换矩阵形式

$$\mathbf{R}_x[-\nu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) & -\cos(\beta) \sin(\alpha) & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{al} = \begin{bmatrix} \cos(\sigma) \cos(\theta) & \cos(\sigma) \sin(\theta) & -\sin(\sigma) \\ \cos(\theta) \sin(\nu) \sin(\sigma) - \cos(\nu) \sin(\theta) & \cos(\nu) \cos(\theta) + \sin(\nu) \sin(\sigma) \sin(\theta) & \cos(\sigma) \sin(\nu) \\ \sin(\nu) \sin(\theta) + \cos(\nu) \cos(\theta) \sin(\sigma) & \cos(\nu) \sin(\sigma) \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\nu) & \cos(\nu) \cos(\sigma) \end{bmatrix}$$

火箭绕质心运动方程 (2)

箭体坐标系下的绕质心动力学方程

$$\begin{bmatrix} J_x \dot{\omega}_{bx} \\ J_y \dot{\omega}_{by} \\ J_z \dot{\omega}_{bz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (J_z - J_y) \omega_{by} \omega_{bz} \\ (J_x - J_z) \omega_{bx} \omega_{bz} \\ (J_y - J_x) \omega_{bx} \omega_{by} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (M_p)_b \\ (M_{sr})_b \\ (M_d)_b \end{bmatrix}$$

↑ 推力力矩      ↑ 气动静力矩      ↑ 阻力力矩

$$= F_p(x_c - x_g) \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\delta_\phi) \sin(\delta_\psi) \\ -\sin(\delta_\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_z(x_p - x_g) \\ -F_n(x_p - x_g) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{dbx} \\ M_{dby} \\ M_{dbz} \end{bmatrix}$$

箭体坐标系下的绕质心运动学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega_{by} \sin(\gamma) + \omega_{bz} \cos(\gamma)) / \cos(\psi) \\ \omega_{by} \cos(\gamma) - \omega_{bz} \sin(\gamma) \\ \omega_{bx} + \tan(\psi)(\omega_{by} \sin(\gamma) + \omega_{bz} \cos(\gamma)) \end{bmatrix}$$

火箭质心运动方程包括动力学方程和运动学方程

速度坐标系下的动力学方程

$$m \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v\dot{\theta} \cos \sigma \\ -v\dot{\sigma} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_x[-\nu] \left[ \begin{bmatrix} F_p \\ F_A \\ m(g) \end{bmatrix}_a + \begin{bmatrix} m(\omega_E)_a \times ((\omega_E)_a \times (r)_a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m(\omega_E)_a \times (v)_a \end{bmatrix} \right]$$

↑ 推力    ↑ 气动力    ↑ 引力    ↑ 牵连力    ↑ 哥式力

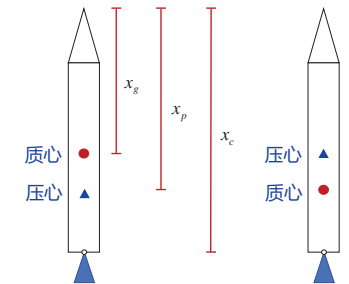
$$= F_p \mathbf{R}_x[-\nu] \mathbf{R}_{ab} \begin{bmatrix} \cos(\delta_\nu) \cos(\delta_\phi) \\ \sin(\delta_\phi) \\ -\cos(\delta_\phi) \sin(\delta_\nu) \end{bmatrix} + \mathbf{R}_x[-\nu] \begin{bmatrix} -C_{DqS_M} \\ C_{LqS_M} \\ C_{CqS_M} \end{bmatrix} + m \mathbf{R}_x[-\nu] \mathbf{R}_{al} \left[ \begin{bmatrix} g_r - g_\phi \tan \phi \\ r_{oly} + r_{ly} \\ r_{olz} + r_{lz} \end{bmatrix} + \frac{g_\phi}{\omega_E \cos \phi} \begin{bmatrix} \omega_{Elx} \\ \omega_{Ely} \\ \omega_{Elz} \end{bmatrix} \right]$$

$$- m \mathbf{R}_x[-\nu] \mathbf{R}_{al} \begin{bmatrix} \omega_{Elx}^2 - \omega_E^2 & \omega_{Elx} \omega_{Ely} & \omega_{Elx} \omega_{Elz} \\ \omega_{Elx} \omega_{Ely} & \omega_{Ely}^2 - \omega_E^2 & \omega_{Ely} \omega_{Elz} \\ \omega_{Elx} \omega_{Elz} & \omega_{Ely} \omega_{Elz} & \omega_{Elz}^2 - \omega_E^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{olx} + r_{lx} \\ r_{oly} + r_{ly} \\ r_{olz} + r_{lz} \end{bmatrix} - 2m \mathbf{R}_x[-\nu] \mathbf{R}_{al} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{Elz} & \omega_{Ely} \\ \omega_{Elz} & 0 & -\omega_{Elx} \\ -\omega_{Ely} & \omega_{Elx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

火箭绕质心运动方程 (1)

绕质心运动方程中变量定义

变量	含义
$J$	转动惯量
$\omega_b$	转动角速度在箭体坐标系的投影
$F_z$	法向气动力
$F_n$	横向气动力
$x_g$	质心至火箭头部理论尖端的距离
$x_c$	喷管出口截面中心至火箭头部理论尖端的距离
$x_p$	压心至火箭头部理论尖端的距离
$\phi$	相对发射坐标系的俯仰角
$\psi$	相对发射坐标系的偏航角
$\gamma$	相对发射坐标系的滚转角



运动方程的简化

运动方程简化的目的

火箭飞行过程中受力多、相互耦合，运动方程形式复杂，不利于设计飞行程序。因此，在初步设计阶段，需抓住上升段弹道的特点，对火箭运动方程进行简化处理。

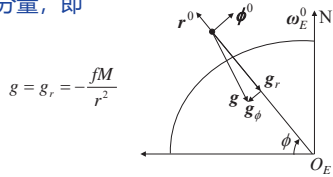
运动方程简化的基本假设

根据上升段弹道的特点，作出以下简化假设：

- a) 引力假设
- b) 地球自转假设
- c) 小角度假设
- d) 力矩平衡假设

a) 引力假设

- 地球视为均质球体，忽略地球扁率及引力分量 $g_\phi$ 的影响，且服从平方反比定律
- 引力加速度只有沿 $y$ 轴的分量，即



$$g = g_r = -\frac{fM}{r^2}$$

b) 地球自转假设

- 忽略地球旋转的影响，即忽略哥式加速度和牵连加速度

$$\omega_E = 0$$

d) 力矩瞬时平衡假设

力矩瞬时平衡

火箭的姿态是稳定的。绕质心转动这一动态过程是短周期运动，对质心运动的影响可以忽略。因此，在研究质心运动时，可不考虑动态过程（自动控制中的“瞬态过程”），忽略质心运动方程中与姿态角速度和角加速度有关项。

- 忽略绕质心运动方程中与姿态角速度和角加速度有关项

$$J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (J\omega) = M_p + M_{st} + M_d$$



$$M_{st} + M_p = 0$$

注：推力矢量与气动力矢量的简化过程

$$R_x[-\nu](F_p)_a + R_x[-\nu](F_A)_a = \begin{bmatrix} F_p - C_D q S_M \\ F_p(\delta_\phi + \alpha) + C_L q S_M \\ F_p(-\delta_\psi - \beta) + C_C q S_M \end{bmatrix} \Rightarrow \text{瞬时平衡假设 } \delta_\phi = -\frac{C_L^\alpha q S_M (x_g - x_p)}{F_p (x_g - x_c)}$$

$$= \begin{bmatrix} F_p - D \\ F_p \alpha - \frac{C_L^\alpha q S_M (x_g - x_p)}{(x_g - x_c)} \alpha + C_L^\alpha q S_M \alpha \\ F_p(-\delta_\psi - \beta) + C_C q S_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p - D \\ (F_p + C_Y^\alpha) \alpha \\ F_p(-\delta_\psi - \beta) + C_C q S_M \end{bmatrix}$$

>  $C = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x_g - x_p}{x_g - x_c} \\ \frac{x_g - x_p}{x_g - x_c} \end{pmatrix}$  为火箭结构参数， $Y^\alpha = C_L^\alpha q S_M$  为升力梯度

> 由于火箭上升段偏航小，只关注垂直平面运动，暂不处理:轴向运动

c) 小角度假设

- 欧拉角  $\alpha, \beta, \gamma, \psi, \sigma, \nu, \theta, \phi$  以及控制量  $\delta_\phi, \delta_\psi$  均为小量，正弦取其角度，余弦取为1
- 出现这些角度值之间的乘积时，作为二阶以上项略去，则坐标转化矩阵为

$$R_x[-\nu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\nu \\ 0 & \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_x[-\nu]R_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 1 & -\nu \\ -\beta & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{al} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\sigma \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & \nu \\ \nu \sin(\theta) + \sigma \cos(\theta) & \sigma \sin(\theta) - \nu \cos(\theta) & 1 \end{bmatrix}, \quad R_x[-\nu]R_{al} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\sigma \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sigma \cos(\theta) & \sigma \sin(\theta) & 1 \end{bmatrix}$$

d) 力矩瞬时平衡假设

$$M_{st} + M_p = 0 \xrightarrow{\text{力矩使用线性形式表示}} M_{z1}^\alpha \alpha + M_{z1}^\delta \delta_\phi = 0$$

将法向气动力近似等于升力  $M_{y1}^\beta \beta + M_{y1}^\delta \delta_\psi = 0$

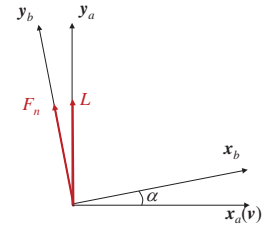
$$F_n = L = C_L q S_M$$



以俯仰通道为例

$$\delta_\phi = -\frac{M_{z1}^\delta}{M_{z1}^\alpha} \alpha = -\frac{C_L^\alpha q S_M (x_g - x_p)}{F_p (x_g - x_c)} \alpha$$

>  $C_L^\alpha$  为升力系数关于  $\alpha$  的导数



法向力与升力关系

火箭垂直平面的质心运动方程简化形式

$$\dot{v} = \frac{F_p - D}{m} + g \sin(\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{(F_p + C_Y^\alpha) \alpha}{mv} + \frac{g}{v} \cos(\theta)$$

$$\dot{x} = v \cos(\theta)$$

$$\dot{y} = v \sin(\theta)$$

$$m = m_0 - \dot{m}t$$

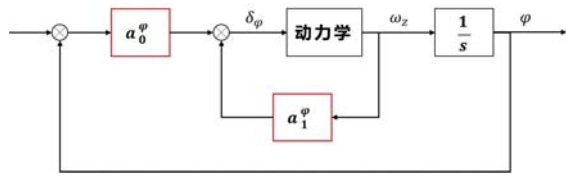
思考：如何求解上述常微分方程？

采用数值积分方法求解：假设初值已知，需要等式右侧的值，即需要攻角随时间变化的规律（飞行程序），因此，弹道程序设计转化为攻角飞行程序的设计。

利用“力矩瞬时平衡”建立攻角与程序姿态角之间的关系

由瞬时平衡假设  $M_{z1}^{\alpha}\alpha + M_{z1}^{\delta}\delta_{\varphi} = 0$

$\delta_{\varphi}$  舵面是由姿态控制方程决定



$$\delta_{\varphi} = a_0^{\varphi}(\varphi - \varphi_{pr}) + a_1^{\varphi}\omega_z$$

$$\delta_{\varphi} = a_0^{\varphi}(\varphi - \varphi_{pr})$$

飞程序设计中的火箭质心运动方程

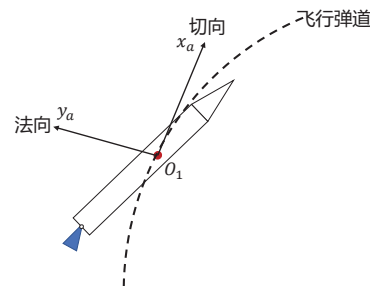
简化的纵向运动方程

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{F_p - D}{m} + g \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{1}{mv}(F_p + CY^{\alpha})\alpha + \frac{g}{v}\cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{x} = v \cos \theta \\ m = m_0 - \dot{m}t \\ \alpha = A(\varphi_{pr} - \theta) \\ A = \frac{a_0^{\varphi}M_{z1}^{\delta}}{M_{z1}^{\alpha} + a_0^{\varphi}M_{z1}^{\delta}} \end{cases}$$

火箭运动特性分析

火箭的纵向运动由切向运动以及法向运动组成

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{F_p - D}{m} + g \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{1}{mv}(F_p + CY^{\alpha})\alpha + \frac{g}{v}\cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{x} = v \cos \theta \\ \alpha = A(\varphi_{pr} - \theta) \\ A = \frac{a_0^{\varphi}M_{z1}^{\delta}}{M_{z1}^{\alpha} + a_0^{\varphi}M_{z1}^{\delta}} \\ m = m_0 - \dot{m}t \end{cases}$$



绕心运动方程在“瞬时平衡”假设条件下的等价形式

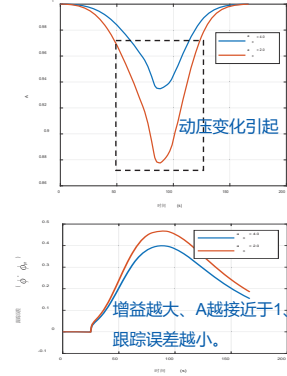
$$\delta_{\varphi} = a_0^{\varphi}(\varphi - \varphi_{pr})$$

$$M_{z1}^{\alpha}\alpha + M_{z1}^{\delta}\delta_{\varphi} = 0$$

由小角度假设  $\alpha = \varphi - \theta$

$$\text{进一步整理得 } \alpha = \frac{a_0^{\varphi}M_{z1}^{\delta}}{M_{z1}^{\alpha} + a_0^{\varphi}M_{z1}^{\delta}}(\varphi_{pr} - \theta)$$

$$A = \frac{a_0^{\varphi}M_{z1}^{\delta}}{M_{z1}^{\alpha} + a_0^{\varphi}M_{z1}^{\delta}} \text{ 对运载火箭, } A \text{ 近似为 } 1$$



目录

- 开环制导
- 火箭运动方程简化
- 火箭运动特性分析
- 飞程序设计

切向运动分析 (1)

切向运动方程

$$\dot{v} = \frac{F_p - D}{m} + g \sin \theta$$

推力方程  $F_p = \dot{m}u_e - S_e p_H$

$$\dot{v} = \frac{\dot{m}}{m}u_e + g \sin \theta - \frac{D}{m} - \frac{S_e p_H}{m}$$

- >  $\dot{m}u_e$  为燃料燃烧所能产生的推力,  $u_e$  为发动机的有效喷气速度
- >  $S_e p_H$  为发动机所处环境压力带来的推力偏差,  $S_e$  为发动机尾喷面积,  $p_H$  为环境压强

$$\dot{v} = \frac{\dot{m}}{m} u_e + g \sin \theta - \frac{D}{m} - \frac{S_e P_H}{m}$$

等式两边积分  $\int \dot{v} = \int \frac{\dot{m}}{m} u_e + \int g \sin \theta - \int \frac{D}{m} - \int \frac{S_e P_H}{m}$

设  $\begin{cases} v_{idk} = \int_0^{t_k} \frac{\dot{m}}{m} u_e dt \\ \Delta v_{1k} = - \int_0^{t_k} g \sin \theta dt \\ \Delta v_{2k} = \int_0^{t_k} \frac{D}{m} dt \\ \Delta v_{3k} = \int_0^{t_k} \frac{S_e P_H}{m} dt \end{cases}$

则有  $v(t_k) = v_{idk} - \Delta v_{1k} - \Delta v_{2k} - \Delta v_{3k}$

大气层内主动段飞行中，提升燃料利用率有效的手段是什么？

$$v(t_k) = v_{idk} - \Delta v_{1k} - \Delta v_{2k} - \Delta v_{3k}$$

- $v_{idk}$  为火箭在真空无引力作用下推力所产生的速度，**理想速度**
- $\Delta v_{1k}$  为引力加速度分量引起的速度损失，约为理想速度的 **20%~30%**
- $\Delta v_{2k}$  为阻力造成的损失，约为理想速度的 **3%~5%**
- $\Delta v_{3k}$  为大气静压力所引起的速度损失，约为理想速度的 **5%**

法向运动方程

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mv} (F_p + CY^\alpha) \alpha + \frac{g}{v} \cos \theta$$

推力贡献      气动贡献      重力贡献

□ 思考：运载火箭依靠何种力实现大气层内转弯？

- A、重力
- B、气动力和推力
- C、重力、气动力和推力共同作用

$$v(t_k) = v_{idk} - \Delta v_{1k} - \Delta v_{2k} - \Delta v_{3k}$$

$v_{idk}$  为火箭在真空无引力作用下推力所产生的速度，称为**理想速度**

$$\dot{m} = - \frac{dm}{dt}$$

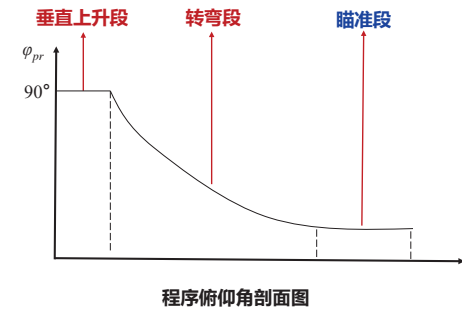
则  $v_{idk}$  可直接积分得到  $v_{idk} = -u_e \ln \frac{m_k}{m_0}$  **火箭公式**

如果  $t_k$  时刻，燃料烧完，那么  $m_k$  为火箭结构质量

□ 思考：如何提高理想速度？

- 1、减小结构质量与总质量的比值（结构专业）
- 2、提高喷气速度（动力专业）

大气层内飞行程序分为三个阶段：垂直上升段、转弯段和瞄准段



火箭在重力、气动力与推力相互配合下完成转弯

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mv} (F_p + CY^\alpha) \alpha + \frac{g}{v} \cos \theta$$

推力贡献      气动贡献      重力贡献

在垂直起飞段， $\varphi = \theta = 90^\circ$ ，不转弯

在转弯段，重力在转弯初期的贡献几乎为零，需要靠控制攻角（推力+气动力）启动转弯过程。

为此，输出小于  $90^\circ$  的程序姿态角：根据力矩瞬时平衡假设，得对应攻角

$$\alpha = - \frac{M_z^\delta}{M_z^\alpha} \delta_\phi = - \frac{F_p (x_g - x_c)}{Y^\alpha (x_g - x_p)} \delta_\phi$$

$$\delta_\phi = \alpha_0^\circ (\varphi - \varphi_{pr})$$

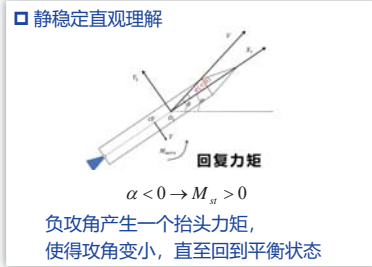
静稳定性

重心位于压心（焦点）之前，纵向静稳定，重心离压心越近，纵向静稳定度降低；重心位于压心之后，纵向静不稳定。

根据力矩瞬时平衡假设

$$\alpha = -\frac{M_z^\delta}{M_z^\alpha} \delta_\varphi = -\frac{F_p(x_g - x_c)}{Y^\alpha(x_g - x_p)} \delta_\varphi$$

$$\begin{cases} x_g - x_p < 0 & \text{静稳定火箭} \\ x_g - x_p \geq 0 & \text{静不稳定火箭} \end{cases}$$



目录

- 开环制导
- 火箭运动方程简化
- 火箭运动特性分析
- 飞行程序设计

飞行程序设计基本原则 (1)

a) 垂直起飞

发射台结构简单，同时也使火箭在起飞时保持稳定，垂直起飞段的时间应合理选择，一般至少保证延续到发动机进入额定工作状态的时刻，与此同时，控制机构也能正常地控制火箭姿态实现转弯。

b) 限制火箭转弯时的法向过载 (重力转弯)

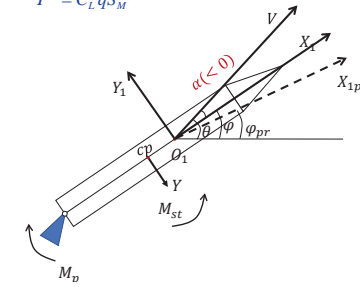
空气力矩以及由气动力造成的法向过载与 $q\alpha$ 成正比，通常要求采用重力转弯：在跨音速及其整个具有大动压头的转弯段弹道上攻角为零或尽可能地小，使火箭只在重力法向分量 $-mg\cos\theta$ 作用下转弯（转弯角速度与重力分量平衡）

$$n_y = \frac{(F_p + C \cdot C_L S_M q) \alpha}{mg_0} = \frac{v \dot{\theta} - g \cos \theta}{g_0}$$

□ 转弯中程序轴、弹轴、速度轴的变化，相应的力和力矩的方向、平衡关系

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_{pr} > 0 &\rightarrow \delta_\varphi = a_\varphi^\alpha (\varphi - \varphi_{pr}) > 0 \rightarrow M_p < 0 && \text{弹轴低头} \\ \alpha < 0 &\rightarrow Y^\alpha \alpha < 0 \rightarrow M_{st} > 0 && \text{抑制弹轴低头} \end{aligned} \Rightarrow M_p \text{ 与 } M_{st} \text{ 相互平衡}$$

$$Y^\alpha = C_L^\alpha q S_M$$



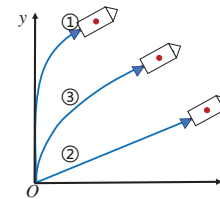
飞行程序设计

飞行程序

通过设计攻角的程序角，得到主动段飞行时俯仰角的变化规律。

飞行程序设计的选择决定了技战术性能：弹道射程、落点散布以及受载和受热等。

□ 终端速度倾角相同，不同的飞行程序对应不同的技战术性能：



- ① 垂直上升，接近主动段终点时转弯：大气层内时间短，转弯需要极大控制力和力矩，转弯对应的法向力大，重力造成的速度损失大（空气阻力速度损失小）
- ② 按不变的速度倾角飞行：长时间在大气层内，速度的阻力损失大，气动加热显著，对发射装置要求高
- ③ 垂直起飞后逐渐转弯：发射装置简单，法向过载和控制力较小，速度的阻力损失和重力损失不至于过大

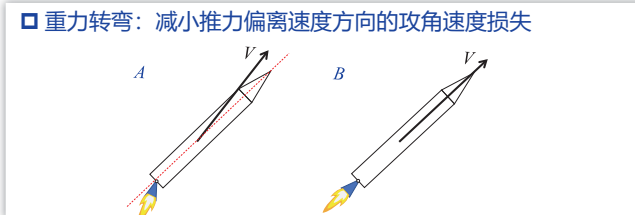
重力转弯

重力转弯：火箭只在重力作用下转弯（攻角为零）

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mv} (F_p + CY^\alpha) \alpha + \frac{g}{v} \cos \theta$$

推力贡献 气动贡献 重力贡献

转弯段，不能一直靠攻角转弯，会降低燃料最优性。



c) 程序俯仰角变化应连续, 角速度与角加速度要有限制

若程序俯仰角 $\varphi_{pr}(t)$ 间断, 则角速度 $\dot{\varphi}_{pr}(t)$ 无穷大, 从而会使法向过载过大;

$$\dot{\theta} = \dot{\varphi} - \dot{\alpha} \xrightarrow{\alpha=0} \dot{\theta} = \dot{\varphi} \quad \dot{\varphi} \uparrow \rightarrow \dot{\theta} \uparrow \rightarrow n_y = \frac{v\dot{\theta} - g \cos \theta}{g_0} \uparrow$$

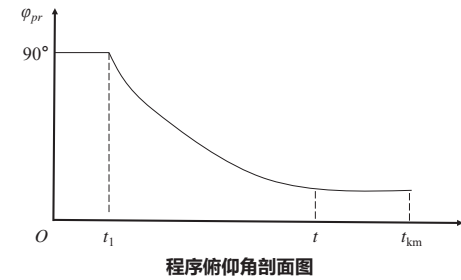
$\dot{\varphi}_{pr}(t)$ 过大, 惯性力矩变大, 有可能使控制机构提供不了所需的控制力矩。

$$J\ddot{\varphi} = M_c \uparrow + M_{st} \uparrow + M_f$$

d) 保证可靠的分离条件与合适的再入条件

例如分离期间要保证姿态尽可能的稳定(常值姿态角分离), 目标射程对弹道倾角的约束等。

根据飞行程序的基本原则, 将主动段弹道分成三段: **垂直上升段、转弯段、瞄准段**



0-t<sub>1</sub>: 垂直上升段, 垂直起飞  
 t<sub>1</sub>-t: 转弯段, 减小法向过载, 程序角变化连续  
 t-t<sub>km</sub>: 瞄准或分离段, 级间分离或弹头分离稳定

飞行程序设计实例

参数类型	参数名称	单位	数值
发射点参数	经度	°	111
	纬度	°	20
	射向	°	90
	高度	m	5
质量特性参数	一级满载质量	kg	123000
	一级空载质量	kg	24000
	火箭全长	mm	30000
	一级满载质心	mm	18000
	一级空载质心	mm	13000
发动机参数	一级发动机推力	N	1300000
	一级燃料秒耗量	kg/s	510



飞行程序设计: 垂直上升段

垂直上升段设计的主要参数: 垂直段结束的时间 t<sub>1</sub> { 过小: 姿态控制能力不足  
 过大: 转弯所需过载升高

$$t_1 = \sqrt{40 / \left( \frac{1}{v_0} - 1 \right)} \quad v_0 \text{ 为火箭地面重推比}$$

□ 物理意义

$$x = \frac{1}{2} \times a_1 \times t_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{m} (mg - mg) \times \left( \sqrt{40 / \left( \frac{1}{v_0} - 1 \right)} \right)^2$$

$$= 196$$

运载火箭垂直上升段的飞行高度约为 196 m

□ 实例

$$v_0 = \frac{123000 \times 9.8}{1300000} \approx 0.93$$

$$t_1 = \sqrt{40 / \left( \frac{1}{v_0} - 1 \right)} \approx 23.05$$

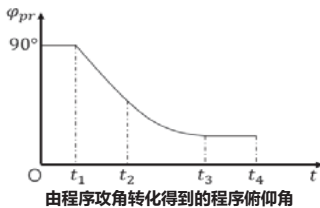
转弯受限于姿控的控制能力, 稳妥起见, 取 t<sub>1</sub> = 25 s

转弯段设计

工程设计方法

设计参数为程序攻角, 分两个阶段设计:

- 1) t<sub>1</sub> - t<sub>2</sub>为有攻角的转弯, 应在气动力急剧变化的跨音速之前结束, 以减少气动载荷和气动干扰, 可在马赫数为0.7-0.9时使攻角减小为零;
- 2) t<sub>2</sub> - t<sub>3</sub>为高动压区, 只依靠重力的法向分量进行转弯, 即**重力转弯**。



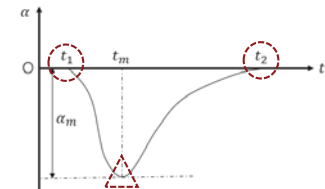
转弯采用的攻角程序 (1)

经验公式 1:

$$\alpha(t) = \begin{cases} -\alpha_m \cdot \sin^2 f(t) & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t_2 < t < t_3 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{\pi(t-t_1)}{K(t_2-t_1) + (t-t_1)}$$

$$K = \frac{t_m - t_1}{t_2 - t_m}$$



- ▶  $\alpha_m$ 为音速段上攻角绝对值的最大值
- ▶  $t_m$ 为攻角到达最大值的时间



经验公式 2:

$$\alpha(t) = -4\alpha_m Z(1-Z)$$

$$Z = e^{-k(t-t_1)}$$

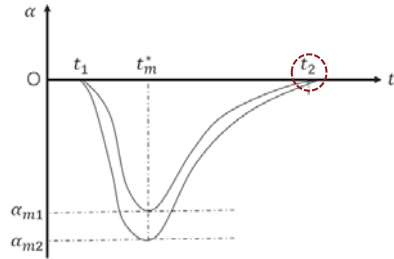
$\alpha_m$  为音速段上攻角绝对值的最大值,  
k 为某一常值, 确定方式如下:

根据  $\frac{d\alpha(t)}{dt} = -4\alpha_m(1-2Z) \frac{dZ}{dt} = 0$

当  $Z = \frac{1}{2}$  时, 达到最大负攻角, 即

$$\frac{1}{2} = e^{-k(t_m-t_1)} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{t_m-t_1}$$

$$t_m = t_1 + \frac{\ln 2}{k}$$

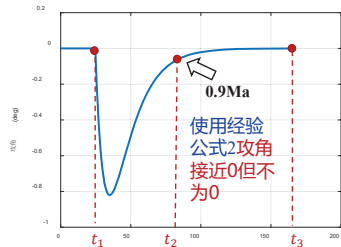


- >  $t_m$  为攻角绝对值到达最大值的时间
- > 与【经验公式1】最大的区别在于  $t_2$  时刻的攻角不为0, 需要调整  $t_m$  使  $t_2$  时刻攻角足够小。

转弯攻角设计实例 (3)

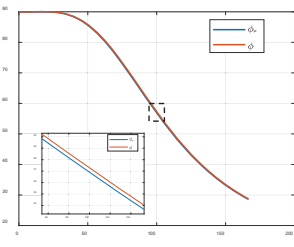
设计实例 (以【经验公式2】为例)

$$\alpha(t) = 4\alpha_m e^{a(t-t_1)} [e^{a(t_2-t)} - 1]$$



指令攻角剖面

动力学积分



指令俯仰角及积分俯仰角剖面

瞄准段飞程序选择

瞄准段保持不变的程序角

$$\varphi_{pr}(t) = \varphi_{pr}(t_3)$$

对于中近程火箭, 一般就要求主动段终点的速度倾角取最小能量弹道的倾角, 即  $\Theta_k = \Theta_{kopt}$  满足方程

$$\Theta_k = \theta_k + \beta_k$$

$$\beta_k = \arctan \frac{x_k}{R_E + y_k}$$

- >  $\Theta_k$  为火箭关机时刻相对于当地水平面的弹道倾角;
- >  $\theta_k$  为火箭相对于发射坐标系的速度倾角;
- >  $\beta_k$  为火箭当前位置相对于发射点的地心角。

设计实例 (以【经验公式2】为例)

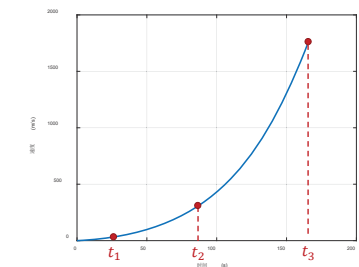
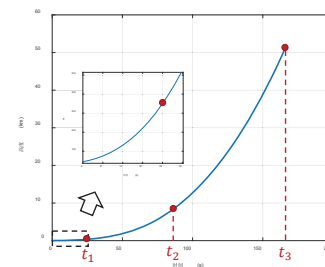
$$\alpha(t) = 4\alpha_m e^{k(t-t_1)} [e^{k(t_2-t)} - 1]$$

- >  $t_1$  为垂直上升段时间, 本例为25s
- >  $\alpha_m$  为重力转弯攻角最大值, 本例取0.82°
- >  $k = \frac{\ln 2}{t_m-t_1}$  中  $t_m$  为攻角绝对值到达最大值的时间, 本例中  $t_m = 35s$

转弯攻角设计实例 (4)

设计实例 (以【经验公式2】为例)

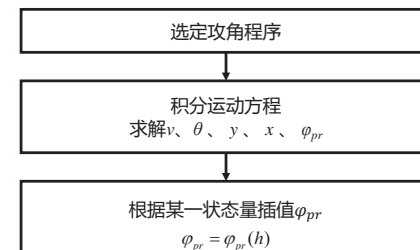
$$\alpha(t) = 4\alpha_m e^{k(t-t_1)} [e^{k(t_2-t)} - 1]$$



飞程序设计

设计流程

根据设计攻角剖面, 得到程序俯仰角剖面  
在实际飞行过程中, 飞控中装载程序俯仰角剖面





问天实验舱搭乘长征五号B发射升空

### 目录

- 摄动制导
- 摄动制导基础
- 有导航信息的摄动制导
- 无导航信息的摄动制导
- 射程及偏导

### 工程应用

#### 东风-5B弹道导弹

据英国《简氏导弹与火箭》披露，“东风-5B”导弹全长32.6米，弹径3.35米，起飞重量183吨，采用**二级液体燃料火箭发动机**，发射井发射，**最大射程15000公里**，可携带1枚3000公斤的威力为300~400万吨TNT当量的核弹头，或4~6枚分导核弹头，**命中精度500~2000米**。



## 摄动制导

### (大气层内上升段制导)

张冉

自主系统与飞行控制实验室

北京航空航天大学宇航学院

2023 春

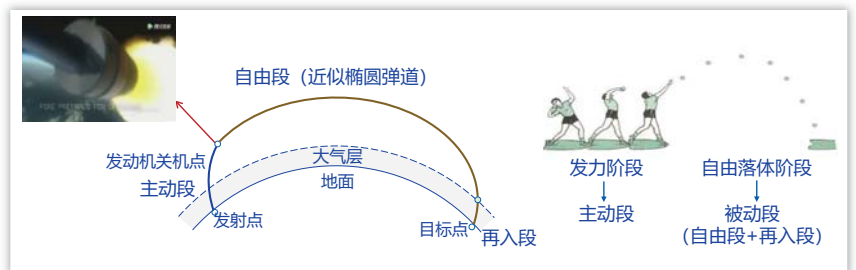
### 目录

- 摄动制导
- 摄动制导基础
- 有导航信息的摄动制导
- 无导航信息的摄动制导
- 射程及偏导

### 问题的提出 (1)

#### 液体弹道导弹

利用**液体火箭发动机**作为动力，有效载荷（弹头）采用**近似椭圆弹道**飞行方式至目标点的飞行器。

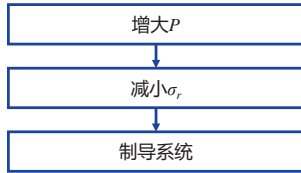


导弹摧毁目标的概率

目标抗冲击波能力的系数 战斗部核装药的TNT当量

P = 1 - e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{2 \sigma\_r^2}} \approx \frac{k^2 q^{2/3}}{2 \sigma\_r^2}

导弹圆散布均方差

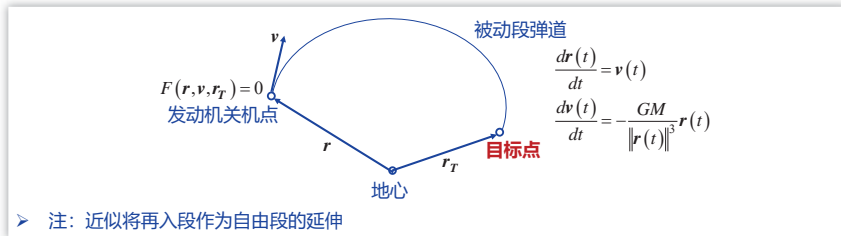


关机方程 (1)

问题: 关机点状态需要满足什么条件?

关机方程

已知: 位置矢量r、速度矢量v以及目标点矢量r\_T, 如果它们满足函数关系F(r, v, r\_T) = 0, 则以该点作为关机点, 被动段弹道与目标点交会, 将函数关系F(r, v, r\_T) = 0称为关机方程。

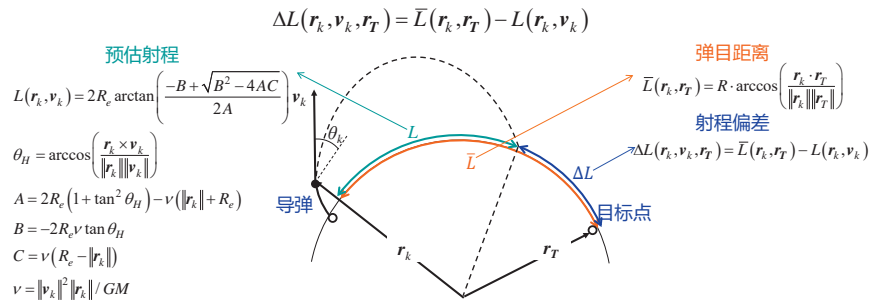


注: 近似将再入段作为自由段的延伸

射程偏差关机方程 (1)

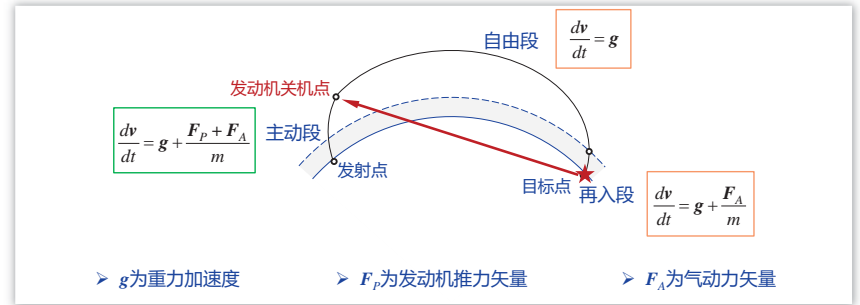
射程偏差

已知: 目标点矢量r\_T, 若以当前运动参数r\_k = r(t\_k)、v\_k = v(t\_k)关机, 不考虑地球自转、忽略被动段气动力和重力异常等因素, 射程偏差为:



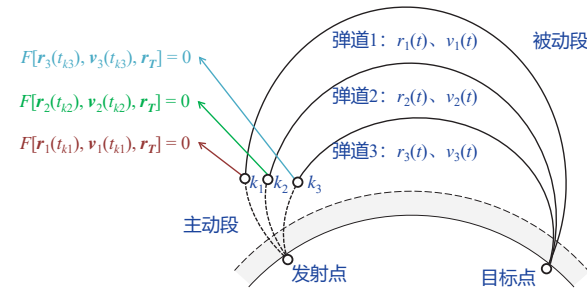
主动段制导任务

给出姿态角指令, 使导弹在关机点的运动参数 (位置矢量和速度矢量) 满足命中目标的要求。



关机方程 (2)

关机点状态不唯一, 只需要关机点状态r(t\_k)、v(t\_k)满足关机方程, 弹头在被动段飞行后到达目标点。

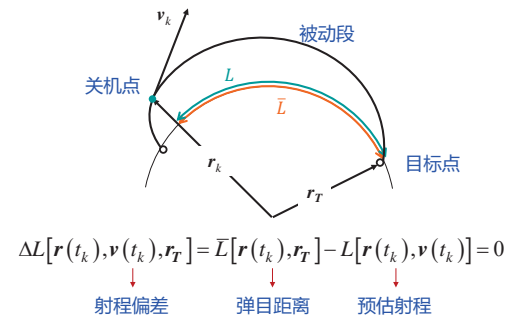


问题: 如何设计关机方程?

射程偏差关机方程 (2)

射程偏差关机方程

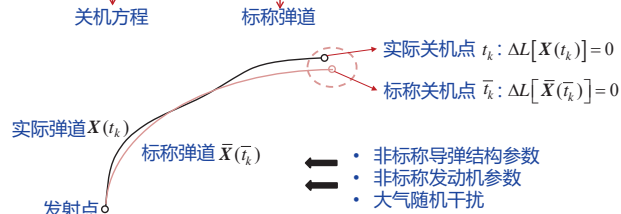
\Delta L[r(t\_k), v(t\_k), r\_T] = 0



问题：如何控制轨迹，使得 **关机点状态** 满足 **关机方程**？

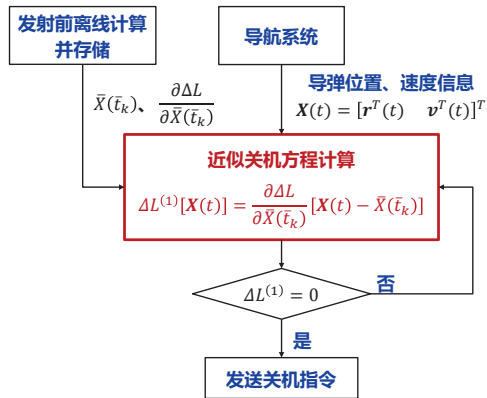
弹道摄动

“摄动”：将一个函数写成在给定参数或变量附近的近似表达式。

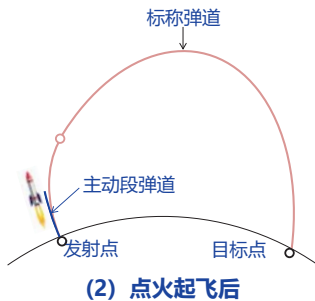


□ 理论计算和飞行实践表明，只要发动机没有故障，且姿控系统正常工作，则导弹飞行实际弹道相对标称弹道偏差不大。这种基于标称弹道的飞行方式形象地称为“*fly along the wire*”。

摄动制导的基本原理 (2)

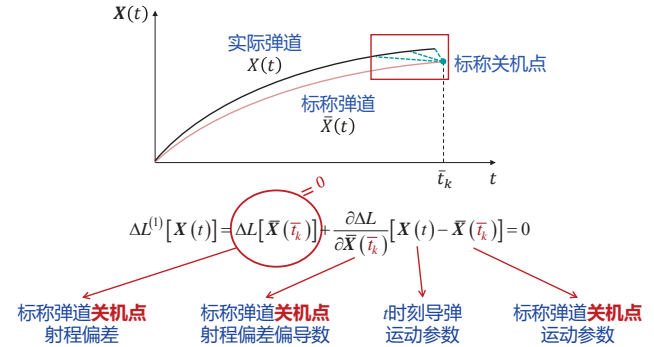


摄动制导的工作过程 (2)

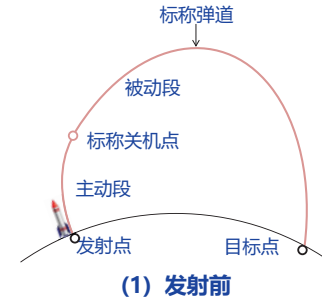


导弹点火起飞后，进入主动段飞行阶段，导弹按照标称弹道飞行，实际弹道在标称弹道附近。

关机方程在标称关机点的一阶泰勒近似



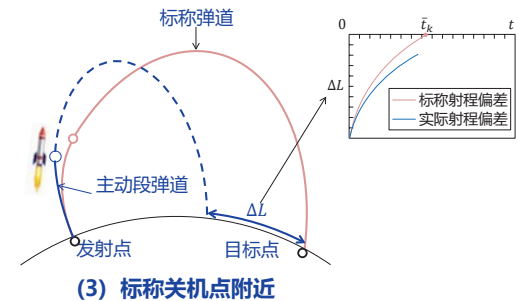
摄动制导的工作过程 (1)



在导弹发射前，获取发射点和目标点的位置坐标信息，根据导弹参数和控制能力，离线设计一条标称弹道，该标称弹道的关机点满足关机方程。

计算标称弹道关机点处参数  $\bar{X}(\bar{t}_k)$  和  $\partial \Delta L / \partial \bar{X}(\bar{t}_k)$ ，并载入弹载计算机。

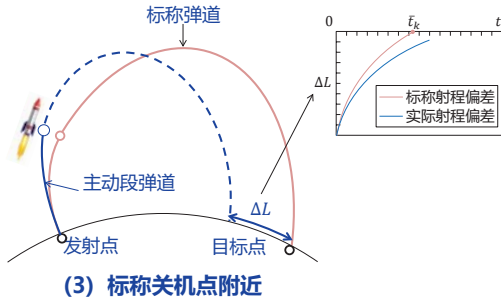
摄动制导的工作过程 (3)



当导弹实际飞行时间接近标称关机点时，制导系统开始计算关机方程：

$$\Delta L^{(1)}[X(t)] = \frac{\partial \Delta L}{\partial \bar{X}(\bar{t}_k)} [X(t) - \bar{X}(\bar{t}_k)]$$

式中， $\bar{X}(\bar{t}_k)$  和  $\partial \Delta L / \partial \bar{X}(\bar{t}_k)$  为发射前载入参数， $X(t)$  则从导航系统中实时获取。



制导系统在每一个制导周期内计算关机方程:

$$\Delta L^{(1)}[X(t)] = \frac{\partial \Delta L}{\partial \bar{X}(\bar{t}_k)} [X(t) - \bar{X}(\bar{t}_k)]$$

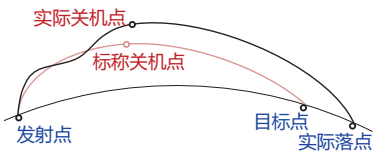
式中,  $\bar{X}(\bar{t}_k)$ 和 $\partial \Delta L / \partial \bar{X}(\bar{t}_k)$ 为发射前载入参数,  $X(t)$ 则从导航系统中实时获取。

摄动制导中关机方程有效性讨论

一阶线性近似关机方程:  $\Delta L^{(1)}[X(t)] = \frac{\partial \Delta L}{\partial \bar{X}(\bar{t}_k)} [X(t) - \bar{X}(\bar{t}_k)] = 0$

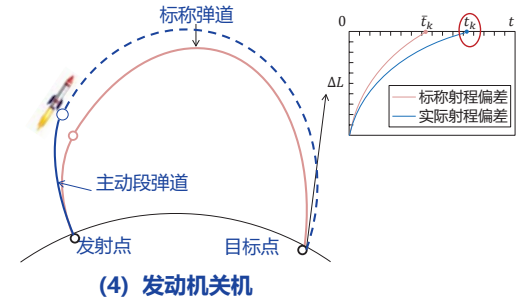
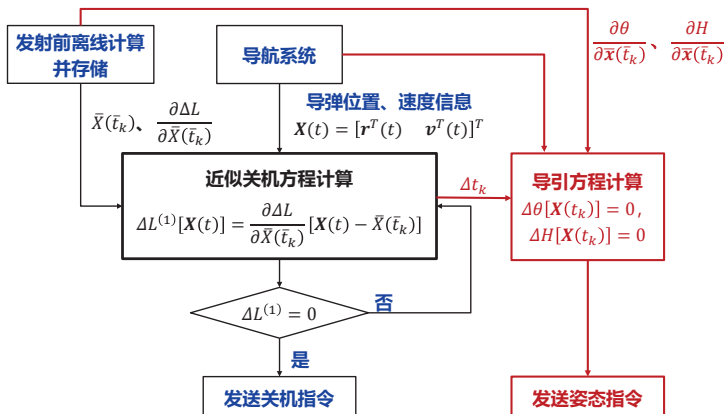
问题: 一阶线性近似关机方程在实际飞行中会失效吗?

在大的建模误差与外扰作用下, 若以标称姿态角飞行, 导弹实际关机点与标称关机点偏离大, 一阶线性近似关机方程不能准确描述非线性关机方程, 导致制导精度下降。



问题: 如何保证一阶线性近似关机方程的有效性?

摄动制导的基本原理 (4)



当关机方程满足时, 即:

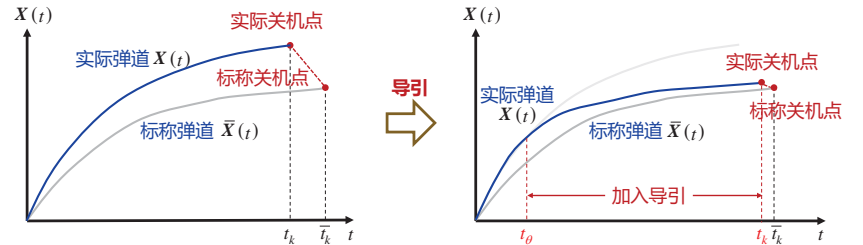
$$\Delta L^{(1)}[X(t)] = \frac{\partial \Delta L}{\partial \bar{X}(\bar{t}_k)} [X(t) - \bar{X}(\bar{t}_k)] = 0$$

制导系统发出关机指令, 发动机关机, 导弹弹体与弹头分离, 弹头进入被动段飞行, 直至命中目标。

导引方程

导引目标

为了保证线性近似关机方程的有效性, 设计导引方程, 调整弹体姿态角, 使实际关机点状态在标称关机点附近。

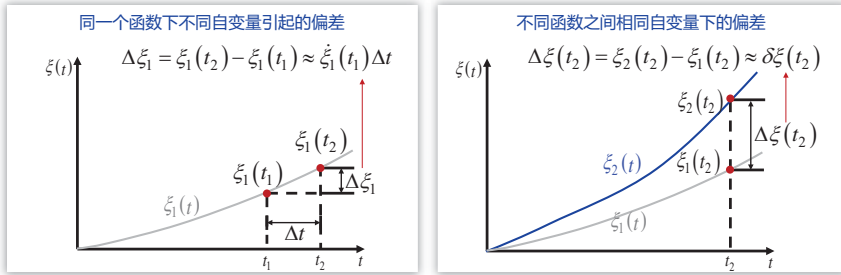


目录

- 摄动制导
- 弹道摄动理论
- 有导航信息的摄动制导
- 无导航信息的摄动制导
- 射程及偏导

设变量  $t, \xi(t)$ , 其中  $\xi$  是  $t$  的函数, 则:

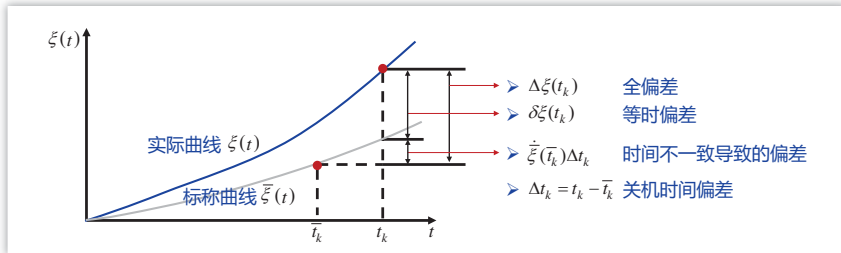
- 增量:  $\Delta t = t_2 - t_1, \Delta \xi_1 = \xi_1(t_2) - \xi_1(t_1), \Delta \xi_2 = \xi_2(t_2) - \xi_1(t_2), \Delta \xi(t) = \xi_2(t_2) - \xi_1(t_1)$
- 微分:  $dt$  为自变量充分小的增量  $\Delta t \rightarrow 0, d\xi = \dot{\xi}(t)dt$
- 变分:  $\delta \xi(t)$  为函数范数充分小的增量  $\|\Delta \xi(t)\| \rightarrow 0$



摄动制导中状态量的等时偏差与全偏差

设状态量  $\xi(t)$  是时间的函数, 标称关机时间为  $\bar{t}_k$ , 标称轨迹在  $\bar{t}_k$  的值为  $\xi(\bar{t}_k)$ ; 实际关机时间为  $t_k$ , 实际轨迹在  $t_k$  处的值为  $\xi(t_k)$ 。状态量的全偏差  $\Delta \xi(t_k)$  约等于由于关机时间不一致导致的偏差  $\dot{\xi}(\bar{t}_k)\Delta t_k$  加上在同一时刻的等时偏差  $\delta \xi(t_k)$ , 即:

$$\xi(t_k) = \bar{\xi}(\bar{t}_k) + \Delta \xi(t_k) \approx \bar{\xi}(\bar{t}_k) + \dot{\xi}(\bar{t}_k)\Delta t_k + \delta \xi(t_k)$$



通过关机方程计算关机时刻

- 在每一制导周期中, 根据当前状态量偏差  $\delta X(t)$ , 计算关机时刻的状态量偏差  $\delta X(t_k)$ , 实时判断关机方程  $\Delta L[X(t_k), t_k] = 0$  是否成立

$$\Delta L[X(t_k), t_k] = \dot{L}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k](t_k - \bar{t}_k) + \frac{\partial L}{\partial X} \delta X(t_k) = 0$$

- 关机时间可由下式得到

令射程偏差为0

$$\Delta L[X(t_k), t_k] = \dot{L}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]\Delta t_k + \frac{\partial L}{\partial X} \delta X(t_k) = 0$$

计算关机时间偏差

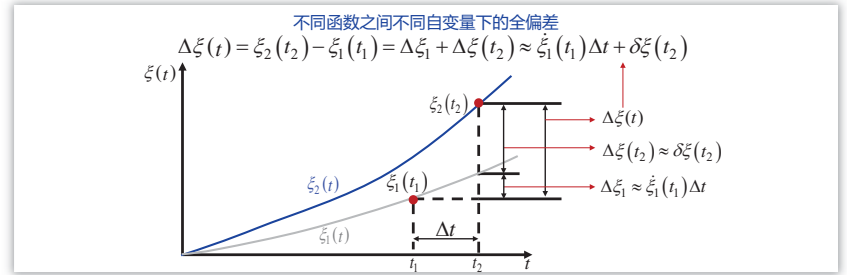
$$\Delta t_k = -\frac{1}{\dot{L}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial X} \delta X(t_k)$$

得到关机时间

$$t_k = \bar{t}_k + \Delta t_k = \bar{t}_k - \frac{1}{\dot{L}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial X} \delta X(t_k)$$

设变量  $t, \xi(t)$ , 其中  $\xi$  是  $t$  的函数, 则:

- 增量:  $\Delta t = t_2 - t_1, \Delta \xi_1 = \xi_1(t_2) - \xi_1(t_1), \Delta \xi_2 = \xi_2(t_2) - \xi_1(t_2), \Delta \xi(t) = \xi_2(t_2) - \xi_1(t_1)$
- 微分:  $dt$  为自变量充分小的增量  $\Delta t \rightarrow 0, d\xi = \dot{\xi}(t)dt$
- 变分:  $\delta \xi(t)$  为函数范数充分小的增量  $\|\Delta \xi(t)\| \rightarrow 0$



射程偏差关机方程的摄动

- 建立射程偏差关机方程, 在标称关机点处线性展开, 使射程偏差为零  
射程偏差的泰勒展开式:

$$\begin{aligned} \Delta L[X(t_k), t_k] &= L[X(t_k), t_k] - L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] \\ &= \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{\bar{X}(\bar{t}_k)} (X(t_k) - \bar{X}(\bar{t}_k)) + \frac{\partial L}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}_k} (t_k - \bar{t}_k) \\ &= \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{\bar{X}(\bar{t}_k)} \left[ \frac{\Delta X(t_k)}{\Delta t_k} + \frac{\partial L}{\partial t_k} \right] \Delta t_k \end{aligned}$$

根据全偏差公式  $\Delta \xi(t_k) = \xi(t_k) - \bar{\xi}(\bar{t}_k) = \dot{\xi}(\bar{t}_k)\Delta t_k + \delta \xi(t_k)$ , 射程偏差可进一步写为:

$$\Delta L[X(t_k), t_k] = \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{\bar{X}(\bar{t}_k)} \left[ \dot{\bar{X}}(\bar{t}_k)\Delta t_k + \delta X(t_k) \right] + \frac{\partial L}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}_k} \Delta t_k = \dot{L}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] \Delta t_k + \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{\bar{X}(\bar{t}_k)} \delta X(t_k)$$

得到射程偏差关机方程在标称关机点附近的线性展开式:

$$\Delta L[X(t_k), t_k] = \dot{L}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] \Delta t_k + \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{\bar{X}(\bar{t}_k)} \delta X(t_k) = 0$$

导引方程: 法向导引方程 (1)

$$\Delta L[X(t_k), t_k] = \dot{L}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k](t_k - \bar{t}_k) + \frac{\partial L}{\partial X} \delta X(t_k) = 0?$$

二阶射程偏差系数

$$\delta L[X(t_k), t_k] \approx \frac{\partial L}{\partial X} \delta X(t_k) + \frac{1}{2} \delta X(t_k)^T \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \delta X(t_k)$$

已知  $L[X_\theta(t_k), t_k] = L[r_x, r_y, r_z, V(v_x, v_y, v_z), \theta(t_x, t_y, t_z, v_x, v_y, v_z), t_k]$  注意: 与 X 不同

$$\frac{\partial L}{\partial X_\theta} = \left[ \frac{\partial L}{\partial r_x} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r_x}, \frac{\partial L}{\partial r_y} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r_y}, \frac{\partial L}{\partial r_z} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r_z}, \frac{\partial L}{\partial v_x}, \frac{\partial L}{\partial v_y}, \frac{\partial L}{\partial v_z} \right]^T$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial X_\theta^2} = \begin{bmatrix} L_{r_x r_x} & L_{r_x r_y} & L_{r_x r_z} & L_{r_x v_x} & L_{r_x v_y} & L_{r_x v_z} \\ L_{r_x r_y} & L_{r_y r_y} & L_{r_y r_z} & L_{r_y v_x} & L_{r_y v_y} & L_{r_y v_z} \\ L_{r_x r_z} & L_{r_y r_z} & L_{r_z r_z} & L_{r_z v_x} & L_{r_z v_y} & L_{r_z v_z} \\ L_{r_x v_x} & L_{r_x v_y} & L_{r_x v_z} & L_{v_x v_x} & L_{v_x v_y} & L_{v_x v_z} \\ L_{r_y v_x} & L_{r_y v_y} & L_{r_y v_z} & L_{v_x v_y} & L_{v_y v_y} & L_{v_y v_z} \\ L_{r_z v_x} & L_{r_z v_y} & L_{r_z v_z} & L_{v_x v_z} & L_{v_y v_z} & L_{v_z v_z} \end{bmatrix} \rightarrow \text{对称矩阵}$$



$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{X}^2} = \begin{bmatrix} L_{r_x r_x} & L_{r_x r_y} & L_{r_x r_z} & L_{r_x v} & L_{r_x \theta} \\ L_{r_x r_y} & L_{r_y r_y} & L_{r_y r_z} & L_{r_y v} & L_{r_y \theta} \\ L_{r_x r_z} & L_{r_y r_z} & L_{r_z r_z} & L_{r_z v} & L_{r_z \theta} \\ L_{v r_x} & L_{v r_y} & L_{v r_z} & L_{v v} & L_{v \theta} \\ L_{\theta r_x} & L_{\theta r_y} & L_{\theta r_z} & L_{\theta v} & L_{\theta \theta} \end{bmatrix}$$

其中  $L_{r_x r_x} = \frac{\partial^2 L}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial r_x \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r_x} + \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \theta r_x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial r_x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r_x} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r_x^2}$   $L_{v v} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$

$L_{r_x r_y} = L_{r_y r_x} = \frac{\partial^2 L}{\partial r_x \partial r_y} + \frac{\partial^2 L}{\partial r_x \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r_y} + \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \theta r_y} + \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial r_y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r_x} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r_x \partial r_y}$   $L_{\theta \theta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}$

$L_{r_x v} = L_{v r_x} = \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial r_x} + \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r_x}$   $L_{v \theta} = L_{\theta v} = \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial \theta}$

$L_{r_x \theta} = L_{\theta r_x} = \frac{\partial^2 L}{\partial r_x \partial \theta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial r_x}$  其他项同理

□ 法向导引

调节俯仰角  $\varphi$ ，在射面内控制质心的法向运动，减小  $\Delta\theta(X(t_k))$ ，保证线性射程关机方程的有效性。

同理射程偏差关机方程的摄动

$$\Delta L[X(t_k), t_k] = \dot{L}[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k] \Delta t_k + \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t_k} \delta X(t_k) = 0$$

关机时刻弹道倾角偏差可写为：

$$\Delta\theta[X(t_k), t_k] = \dot{\theta}[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k] \Delta t_k + \left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t_k} \delta X(t_k)$$

由关机时间

$$\Delta t_k = - \left. \frac{1}{\dot{L}[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t_k} \delta X(t_k)$$

进一步整理得

$$\Delta\theta[X(t_k), t_k] = \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} \right]_{t_k} - \frac{\dot{\theta}[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k]}{\dot{L}[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k]} \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t_k} \delta X(t_k) = 0$$

横向导引

控制偏航角  $\psi$ ，控制导弹质心的横向方向，保证导弹落点横向偏差  $\Delta H$  在容许范围内。（与法向处理方式一致）

同理，得导弹落点横向偏差为：

$$\Delta H[X(t_k), t_k] = \left[ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\dot{H}[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k]}{\dot{L}[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k]} \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t_k} \right] \delta X(t_k) = 0$$

摄动制导使法向导引方程成立的策略



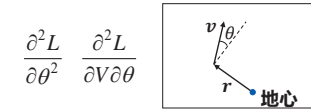
问题：如何预测  $\Delta H[X(t_k), t_k]$  ？

$$\Delta L[X_\theta(t_k), t_k] = \dot{L}[\bar{X}_\theta(\bar{t}_k), \bar{t}_k] (t_k - \bar{t}_k) + \left. \frac{\partial L[X_\theta(t_k), t_k]}{\partial X_\theta} \right|_{t_k} = 0?$$

二阶射程偏差系数

$$\delta L[X_\theta(t_k), t_k] \approx \left. \frac{\partial L}{\partial X_\theta} \right|_{t_k} \delta X_\theta(t_k) + \frac{1}{2} \delta X_\theta(t_k)^T \left. \frac{\partial^2 L}{\partial X_\theta^2} \right|_{t_k} \delta X_\theta(t_k)$$

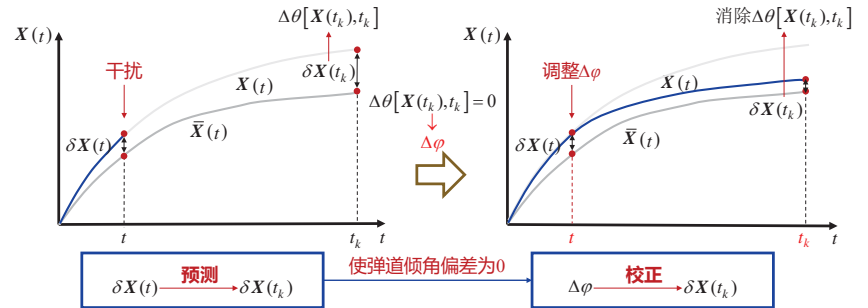
□ 对射程偏差系数的计算和分析表明，在二阶射程偏差系数中，以下两个偏导数对落点射程偏差影响最大：



$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial \theta}$$

控制弹道倾角偏差  $\Delta\theta(X(t_k))$  小于容许值，是保证一阶摄动制导准确性的前提

□ 在制导周期，根据当前状态量偏差  $\delta X(t)$ ，预测关机时刻的状态量偏差  $\delta X(t_k)$ ，调整当前俯仰角  $\Delta\varphi$  改变  $\delta X(t_k)$ ，使得  $\Delta\theta[X(t_k), t_k] = 0$  成立。



在校正之前，需要解决的问题： $\Delta\theta[X(t_k), t_k]$  如何预测？

□ 导引目标

- ① 控制俯仰角，调节关机时刻弹道倾角偏差  $\Delta\theta[X(t_k), t_k] = 0$
- ② 控制偏航角，调节关机时刻落点横向偏差  $\Delta H[X(t_k), t_k] = 0$

✓ 制导需要满足的动力学约束（发惯系下）

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{z} &= v_z \\ \left( \frac{dr_L}{dt} \right)_L &= (v)_L \\ \left( \frac{dv}{dt} \right)_L &= \frac{(F_p)_L + (F_A)_L + (F_l)_L}{m} + (g)_L \end{aligned}$$

- 忽略发动机摆动惯性力  $F_l = 0$
- 忽略发动机摆角  $\delta_\varphi = \delta_\psi = 0$
- 滚转角为零  $\gamma_L = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \cos(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ax} + g_x \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \sin(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ay} + g_y \\ \dot{v}_z &= -\frac{1}{m} \sin(\psi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Az} + g_z \end{aligned}$$

1、终端目标的预测

根据当前的状态量偏差  $\delta X(t)$ ，预测关机时刻的状态量偏差  $\delta X(t_k)$ ，从而预测关机时刻的特征量  $\Delta L[X(t_k), t_k]$ 、 $\Delta \theta[X(t_k), t_k]$  和  $\Delta H[X(t_k), t_k]$ 。

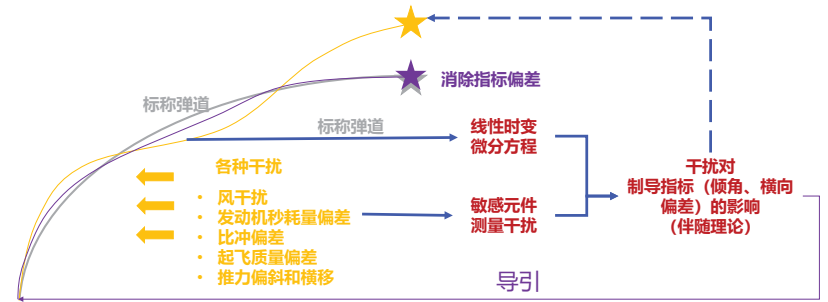
✓ 采用**伴随定理**，实时预测当前偏差对终端特征量（状态量偏差的线性组合）的影响

2、制导指令的校正

利用控制量俯仰角 $\Delta \varphi$ 和偏航角 $\Delta \psi$ ，实时消除干扰量 $f(t)$ 引起的特征量偏差 $\Delta \theta[X(t_k), t_k]=0$ 和  $\Delta H[X(t_k), t_k]=0$ 。

✓ 采用**干扰抑制原理**，实时补偿干扰对终端偏差的影响

□ 分析当前状态偏差和干扰对终端制导指标影响的理论基础是**伴随理论**



动力学方程线性化 (1)

非线性动力学方程

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t))$$

$$\text{状态量 } X = [r_x \ r_y \ r_z \ v_x \ v_y \ v_z]^T$$

$$\text{控制量 } U = [\varphi_L \ \psi_L]^T$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= v_x \\ \dot{r}_y &= v_y \\ \dot{r}_z &= v_z \\ \dot{v}_x &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \cos(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ax} + g_x \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \sin(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ay} + g_y \\ \dot{v}_z &= -\frac{1}{m} \sin(\psi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Az} + g_z \end{aligned}$$

线性时变系统

$$\delta \dot{X}(t) = A(t) \delta X(t) + B(t) \delta U(t)$$

$$\text{状态量 } \delta X = [\delta r_x \ \delta r_y \ \delta r_z \ \delta v_x \ \delta v_y \ \delta v_z]^T$$

$$\text{控制量 } \delta U = [\delta \varphi_L \ \delta \psi_L]^T$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{r}_x &= \delta v_x \\ \delta \dot{r}_y &= \delta v_y \\ \delta \dot{r}_z &= \delta v_z \\ \delta \dot{v}_x &= \frac{\partial g_x}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_x}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_x}{\partial r_z} \delta r_z - \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L \\ &\quad - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L + f_x \\ \delta \dot{v}_y &= \frac{\partial g_y}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_y}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_y}{\partial r_z} \delta r_z + \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L \\ &\quad - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L + f_y \\ \delta \dot{v}_z &= \frac{\partial g_z}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_z}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_z}{\partial r_z} \delta r_z - \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \delta \psi_L + f_z \end{aligned}$$

动力学方程线性化 (3)

非线性动力学方程

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t))$$

$$\text{状态量 } X = [r_x \ r_y \ r_z \ v_x \ v_y \ v_z]^T$$

$$\text{控制量 } U = [\varphi_L \ \psi_L]^T$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= v_x \\ \dot{r}_y &= v_y \\ \dot{r}_z &= v_z \\ \dot{v}_x &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \cos(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ax} + g_x \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \sin(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ay} + g_y \\ \dot{v}_z &= -\frac{1}{m} \sin(\psi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Az} + g_z \end{aligned}$$

标称弹道

$$\dot{\bar{X}}(t) = f(\bar{X}(t), \bar{U}(t))$$

$$\text{状态量 } \bar{X} = [\bar{r}_x \ \bar{r}_y \ \bar{r}_z \ \bar{v}_x \ \bar{v}_y \ \bar{v}_z]^T$$

$$\text{控制量 } \bar{U} = [\bar{\varphi}_L \ \bar{\psi}_L]^T$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}}_x &= \bar{v}_x \\ \dot{\bar{r}}_y &= \bar{v}_y \\ \dot{\bar{r}}_z &= \bar{v}_z \\ \dot{\bar{v}}_x &= \frac{1}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \bar{F}_p + \bar{g}_x + f_x \\ \dot{\bar{v}}_y &= \frac{1}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \bar{F}_p + \bar{g}_y + f_y \\ \dot{\bar{v}}_z &= -\frac{1}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \bar{F}_p + \bar{g}_z + f_z \\ [f_x \ f_y \ f_z]^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m} F_{Ax} & \frac{1}{m} F_{Ay} & \frac{1}{m} F_{Az} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

动力学方程线性化 (2)

非线性动力学方程

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t))$$

标称弹道

$$\dot{\bar{X}}(t) = f(\bar{X}(t), \bar{U}(t))$$



$$\begin{aligned} X(t) &= \bar{X}(t) + \delta X(t) \\ U(t) &= \bar{U}(t) + \delta U(t) \end{aligned}$$

将非线性动力学方程沿标称弹道展开成泰勒级数

$$\dot{X}(t) = f(\bar{X}(t), \bar{U}(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} (X(t) - \bar{X}(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial U} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} (U(t) - \bar{U}(t)) + \text{高阶项}$$

略去泰勒级数展开式二阶以上各项，得到线性时变系统

$$\delta \dot{X}(t) = A(t) \delta X(t) + B(t) \delta U(t), \text{ 其中 } A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{\bar{X}, \bar{U}}, B(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial U} \right|_{\bar{X}, \bar{U}}$$

动力学方程线性化 (4)

线性时变系统

$$\delta \dot{X}(t) = A(t) \delta X(t) + B(t) \delta U(t) + C(t) f(t)$$

$$\text{状态量 } \delta X = [\delta r_x \ \delta r_y \ \delta r_z \ \delta v_x \ \delta v_y \ \delta v_z]^T, \text{ 控制量 } \delta U = [\delta \varphi_L \ \delta \psi_L]^T, \text{ 干扰量 } f = [f_x \ f_y \ f_z]^T$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{r}_x &= \delta v_x \\ \delta \dot{r}_y &= \delta v_y \\ \delta \dot{r}_z &= \delta v_z \\ \delta \dot{v}_x &= \frac{\partial g_x}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_x}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_x}{\partial r_z} \delta r_z - \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L + f_x \\ \delta \dot{v}_y &= \frac{\partial g_y}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_y}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_y}{\partial r_z} \delta r_z + \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L + f_y \\ \delta \dot{v}_z &= \frac{\partial g_z}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_z}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_z}{\partial r_z} \delta r_z - \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \delta \psi_L + f_z \end{aligned}$$



线性时变系统

$$\delta \dot{X}(t) = A(t)\delta X(t) + B(t)\delta U(t) + C(t)f(t)$$

状态量  $\delta X = [\delta r_x \ \delta r_y \ \delta r_z \ \delta v_x \ \delta v_y \ \delta v_z]^T$ , 控制量  $\delta U = [\delta \varphi_L \ \delta \psi_L]^T$ , 干扰量  $f = [f_x \ f_y \ f_z]^T$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial g_x}{\partial r_x} & \frac{\partial g_x}{\partial r_y} & \frac{\partial g_x}{\partial r_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_y}{\partial r_x} & \frac{\partial g_y}{\partial r_y} & \frac{\partial g_y}{\partial r_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_z}{\partial r_x} & \frac{\partial g_z}{\partial r_y} & \frac{\partial g_z}{\partial r_z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) & -\frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \\ \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) & -\frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \\ 0 & -\frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

伴随定理 (2)

对式  $\Lambda^T(t)\delta X(t)$  求导, 得:

$$\begin{aligned} \frac{d(\Lambda^T(t)\delta X(t))}{dt} &= \Lambda^T(t)\delta \dot{X}(t) + \dot{\Lambda}^T(t)\delta X(t) \\ &= \Lambda^T(t)(A(t)\delta X(t) + B(t)\delta U(t)) - (A^T(t)\Lambda(t))^T \delta X(t) \\ &= \Lambda^T(t)B(t)\delta U(t) \end{aligned}$$

对上式左右两端积分, 得:

$$\Lambda^T(t_k)\delta X(t_k) = \Lambda^T(t)\delta X(t) + \int_t^{t_k} \Lambda^T(\tau)B(\tau)\delta U(\tau)d\tau$$

采用伴随定理预测关机时刻特征量 (2)

□ 伴随定理可以看作: 终端  $t_k$  时刻的特征量  $\Lambda^T(t_k)\delta X(t_k)$  对于当前状态量  $\delta X(t)$  的敏感度, 合理地选取  $\Lambda^T(t_k)$ , 可得到特定的特征量对于当前状态量的敏感度

□ 在摄动制导中, 特征量摄动  $\delta F$  即为关机方程和导引方程的特征量  $\delta L$ 、 $\delta \theta$  和  $\delta H$

对于关机方程,

$$\Lambda(t_k) = \left( \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{t_k} \right)^T$$

对于法向导引方程,

$$\Lambda(t_k) = \left[ \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{t_k} - \frac{\dot{\theta}[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k]}{L[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{t_k} \right]^T$$

对于横向导引方程,

$$\Lambda(t_k) = \left[ \frac{\partial H}{\partial X} \Big|_{t_k} - \frac{\dot{H}[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k]}{L[\bar{X}(t_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{t_k} \right]^T$$

对于线性时变系统:

$$\delta \dot{X}(t) = A(t)\delta X(t) + B(t)\delta U(t)$$

定义伴随方程为:

$$\dot{\Lambda}(t) = -A^T(t)\Lambda(t)$$

则有:

$$\Lambda^T(t_k)\delta X(t_k) = \Lambda^T(t)\delta X(t) + \int_t^{t_k} \Lambda^T(\tau)B(\tau)\delta U(\tau)d\tau$$

采用伴随定理预测关机时刻特征量 (1)

对于线性时变系统:

$$\delta \dot{X}(t) = A(t)\delta X(t) + B(t)\delta U(t)$$

若特征量  $F[X(t_k)]$  是终端  $t_k$  时刻状态量  $X(t_k)$  的函数, 定义伴随方程:

$$\dot{\Lambda}(t) = -A^T(t)\Lambda(t)$$

$$\Lambda(t_k) = \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)^T$$

根据伴随定理, 特征量  $F[X(t_k)]$  的摄动量可表示为:

$$\delta F(t_k) = \frac{\partial F}{\partial X} \delta X(t_k) = \Lambda^T(t_k)\delta X(t_k) = \Lambda^T(t)\delta X(t) + \int_t^{t_k} \Lambda^T(\tau)B(\tau)\delta U(\tau)d\tau$$

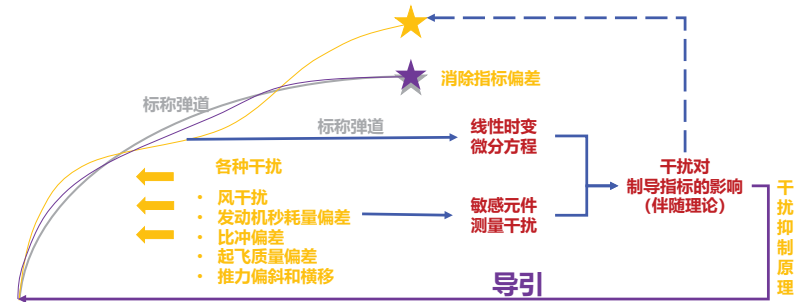
当前状态量引起的偏差  
从当前时刻至终端时刻的控制量引起的偏差

当控制量  $\delta U(t) = 0$  时, 上式可简化为

$$\delta F(t_k) = \Lambda^T(t_k)\delta X(t_k) = \Lambda^T(t)\delta X(t)$$

干扰抑制原理 (1)

□ 基于干扰抑制原理设计导引过程, 保证实际弹道相对标称弹道的摄动较小



对于一个考虑干扰量  $f(t)$  的线性时变系统:

$$\delta \dot{X}(t) = A(t)\delta X(t) + B(t)\delta U(t) + C(t)f(t)$$

根据伴随定理, 特征量  $F[X(t_k)]$  的摄动量可表示为:

$$\delta F(t_k) = \underbrace{\Lambda^T(t)\delta X(t)}_{\text{当前状态量引起的偏差}} + \int_t^{t_k} \left[ \underbrace{\Lambda^T(\tau)B(\tau)\delta U(\tau)}_{\text{从当前时刻至终端时刻的控制量引起的偏差}} + \underbrace{\Lambda^T(\tau)C(\tau)f(\tau)}_{\text{从当前时刻至终端时刻的干扰量引起的偏差}} \right] d\tau$$

问题: 假设当前状态量引起的终端偏差为零, 即  $\Lambda^T(t)\delta X(t) = 0$ 。如何保证关机时刻对应的特征量为零?

### 目录

- 摄动制导
- 弹道摄动理论
- 有导航信息的摄动制导
- 无导航信息的摄动制导
- 射程及偏导

### 质心运动方程线性展开

在标称轨迹附近, 将质心运动方程进行一阶线性展开:

$$\begin{aligned} \delta \dot{r}_x &= \delta v_x \\ \delta \dot{r}_y &= \delta v_y \\ \delta \dot{r}_z &= \delta v_z \end{aligned}$$

$$\delta \dot{v}_x = \underbrace{\frac{\partial g_x}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_x}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_x}{\partial r_z} \delta r_z}_{\text{重力部分}} + \underbrace{\frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L}_{\text{推力部分}} + \underbrace{f_x}_{\text{干扰力部分}}$$

$$\delta \dot{v}_y = \frac{\partial g_y}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_y}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_y}{\partial r_z} \delta r_z + \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L + f_y$$

$$\delta \dot{v}_z = \frac{\partial g_z}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_z}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_z}{\partial r_z} \delta r_z - \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \delta \psi_L + f_z$$

- 思考: 为什么将气动力考虑进干扰力中进行处理?
  - 相比于推力, 导弹所受到的气动力较小
  - 气动力具有非线性, 一阶近似误差较大

### 干扰抑制

假设当前状态量引起的终端偏差为零, 即  $\Lambda^T(t)\delta X(t) = 0$

在每一时刻, 用控制量  $\delta U(t)$  引起的终端特征量偏差抑制由于干扰量  $f(t)$  引起的终端特征量偏差, 即:

$$\Lambda^T(\tau)B(\tau)\delta U(\tau) + \Lambda^T(\tau)C(\tau)f(\tau) = 0$$

整理得:

$$\delta U(t) = -[\Lambda^T(t)B(t)]^{-1} \Lambda^T(t)C(t)f(t) = K_f(t)f(t)$$

➢ 在法向和横向导引方程中, 均是一个控制量对应一个特征量, 即  $U$  和  $f$  为标量

### 有导航信息下的质心运动方程

□ 弹载计算机中有导航系统部分, 能够根据惯性元件和卫星导航等原始数据解算得到导弹的全状态信息, 即  $r_x$ 、 $r_y$ 、 $r_z$ 、 $v_x$ 、 $v_y$  和  $v_z$ 。

质心运动方程:

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= v_x \\ \dot{r}_y &= v_y \\ \dot{r}_z &= v_z \\ \dot{v}_x &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \cos(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ax} + g_x \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \sin(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ay} + g_y \\ \dot{v}_z &= -\frac{1}{m} \sin(\psi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Az} + g_z \end{aligned}$$

思考: 如果没有导航, 选择何种坐标系?

### 线性质心运动方程

线性质心运动方程可表示为紧凑形式:

$$\delta \dot{X}(t) = A(t)\delta X(t) + B(t)\delta U(t) + C(t)f(t)$$

其中, 状态量  $\delta X = [\delta r_x \ \delta r_y \ \delta r_z \ \delta v_x \ \delta v_y \ \delta v_z]^T$ , 控制量  $\delta U = [\delta \varphi_L \ \delta \psi_L]^T$ , 干扰量  $f = [f_x \ f_y \ f_z]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial g_x}{\partial r_x} & \frac{\partial g_x}{\partial r_y} & \frac{\partial g_x}{\partial r_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_y}{\partial r_x} & \frac{\partial g_y}{\partial r_y} & \frac{\partial g_y}{\partial r_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_z}{\partial r_x} & \frac{\partial g_z}{\partial r_y} & \frac{\partial g_z}{\partial r_z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) & -\frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \\ \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) & -\frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \\ 0 & -\frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则质心运动方程的伴随方程可表示为：

$$\dot{\Lambda}(t) = -A^T(t)\Lambda(t)$$

其中，伴随状态量  $\Lambda = [\lambda_{rx} \ \lambda_{ry} \ \lambda_{rz} \ \lambda_{vx} \ \lambda_{vy} \ \lambda_{vz}]^T$ ，伴随方程的展开形式为：

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{rx} &= -\frac{\partial g_x}{\partial r_x} \lambda_{vx} - \frac{\partial g_y}{\partial r_x} \lambda_{vy} - \frac{\partial g_z}{\partial r_x} \lambda_{vz} \\ \dot{\lambda}_{ry} &= -\frac{\partial g_x}{\partial r_y} \lambda_{vx} - \frac{\partial g_y}{\partial r_y} \lambda_{vy} - \frac{\partial g_z}{\partial r_y} \lambda_{vz} \\ \dot{\lambda}_{rz} &= -\frac{\partial g_x}{\partial r_z} \lambda_{vx} - \frac{\partial g_y}{\partial r_z} \lambda_{vy} - \frac{\partial g_z}{\partial r_z} \lambda_{vz} \\ \dot{\lambda}_{vx} &= -\lambda_{rx} \\ \dot{\lambda}_{vy} &= -\lambda_{ry} \\ \dot{\lambda}_{vz} &= -\lambda_{rz} \end{aligned}$$

计算伴随矢量 (1)

已知关机方程伴随系统的终端值  $\Lambda_s(t_k)$ ，反向积分伴随系统，求解关机方程伴随量  $\Lambda_s(t)$

$$\Lambda_s(t_k) = \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t_k} \right)^T = \left[ \frac{\partial L}{\partial r_x} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial r_y} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial r_z} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial v_x} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial v_y} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial v_z} \Big|_{t_k} \right]^T$$

终端条件在  $t_k$  处

**问题：实际关机时刻  $t_k$  未知，如何求  $\Lambda_s(t)$  ?**

- **无法**提前预测关机时刻，不能直接对伴随系统进行反向积分
- 因此，将具体推导  $\Lambda(t)$  的近似方法

证明伴随系统的解为  $\Lambda_s(t) = \Phi(t, t_k)\Lambda_s(t_k)$

根据微分方程解的唯一性，该结论归结为证明  $\Lambda_s(t) = \Phi(t, t_k)\Lambda_s(t_k)$  满足状态转移方程和初始条件

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_s(t) &= -A^T(t)\Lambda_s(t) \\ \Lambda_s(t_k) & \end{aligned}$$

对  $\Lambda_s(t) = \Phi(t, t_k)\Lambda_s(t_k)$  求导，则：

$$\dot{\Lambda}_s(t) = \frac{d\Phi(t, t_k)\Lambda_s(t_k)}{dt} = \frac{d\Phi(t, t_k)}{dt}\Lambda_s(t_k) = -A^T(t)\Phi(t, t_k)\Lambda_s(t_k) = -A^T(t)\Lambda_s(t)$$

且：

$$\begin{aligned} \Lambda_s(t_k) &= \Phi(t_k, t_k)\Lambda_s(t_k) = \Lambda_s(t_k) \\ \Phi(t_k, t_k) &= I \end{aligned}$$

验证满足状态转移方程和初始条件

由射程关机方程：

$$\Delta L[X(t_k), t_k] = \dot{L}[\bar{X}(t_k), t_k] \Delta t_k + \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t_k} \delta \mathbf{X}(t_k) = 0$$

已知 未知

令射程关机方程伴随系统的终端值：

$$\Lambda_s(t_k) = \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t_k} \right)^T = \left[ \frac{\partial L}{\partial r_x} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial r_y} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial r_z} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial v_x} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial v_y} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial v_z} \Big|_{t_k} \right]^T$$

根据**导航信息**，已知  $t$  时刻导弹状态量为  $X(t)$ ，与标称轨迹的偏差为：

$$\delta X(t) = X(t) - \bar{X}(t)$$

则根据伴随定理，当控制量  $\delta U(t) = \mathbf{0}$  时，预测射程的等时偏差为：

$$\delta L[X(t_k), t_k] = \Lambda_s^T(t_k) \delta X(t_k) = \Lambda_s^T(t) \delta X(t)$$

待求量

计算伴随矢量 (2)

已知射程关机方程伴随系统

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_s(t) &= -A^T(t)\Lambda_s(t) \\ \Lambda_s(t_k) &= \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t_k} \right)^T = \left[ \frac{\partial L}{\partial r_x} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial r_y} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial r_z} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial v_x} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial v_y} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial L}{\partial v_z} \Big|_{t_k} \right]^T \end{aligned}$$

定义**伴随方程的状态转移矩阵**为  $\Phi(t, t_k)$ ：

$$\frac{d\Phi(t, t_k)}{dt} = -A^T(t)\Phi(t, t_k)$$

则满足：

伴随系统的解： $\Lambda_s(t) = \Phi(t, t_k)\Lambda_s(t_k)$

传递性： $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_k) = \Phi(t_2, t_k)$

可逆性： $\Phi^{-1}(t, t_k) = \Phi(t_k, t)$

对  $t_k$  求导： $\frac{d\Phi(t, t_k)}{dt_k} = \Phi(t, t_k)A^T(t_k)$

证明伴随系统的传递性  $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_k) = \Phi(t_2, t_k)$  和可逆性  $\Phi^{-1}(t, t_k) = \Phi(t_k, t)$

由伴随系统的解为  $\Lambda_s(t) = \Phi(t, t_k)\Lambda_s(t_k)$ ，则：

$$\Lambda_s(t_2) = \Phi(t_2, t_k)\Lambda_s(t_k)$$

且有：

$$\Lambda_s(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\Lambda_s(t_1) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_k)\Lambda_s(t_k)$$

因此，有：

$$\Phi(t_2, t_k)\Lambda_s(t_k) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_k)\Lambda_s(t_k)$$

则满足传递性：

$$\Phi(t_2, t_k) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_k)$$

由传递性，有：

$$\Phi(t_k, t)\Phi(t, t_k) = \Phi(t_k, t_k) = I$$

则满足可逆性：

$$\Phi^{-1}(t, t_k) = \Phi(t_k, t)$$

由伴随系统的可逆性  $\Phi^{-1}(t, t_k) = \Phi(t_k, t)$

$$\frac{d\Phi(t, t_k)}{dt_k} = \frac{d\Phi^{-1}(t_k, t)}{dt_k} = -\Phi^{-1}(t_k, t) \frac{d\Phi(t_k, t)}{dt_k} \Phi^{-1}(t_k, t) = \Phi(t, t_k) A^T(t_k) \Phi(t_k, t) \Phi(t, t_k) = \Phi(t, t_k) A^T(t_k)$$

即满足:

$$\frac{d\Phi(t, t_k)}{dt_k} = \Phi(t, t_k) A^T(t_k)$$

□ 逆矩阵的导数求解

$$AA^{-1} = I \implies \dot{A}A^{-1} + AA^{-1} = 0 \implies \dot{A}^{-1} = -A^{-1}\dot{A}A^{-1}$$

### 计算伴随矢量 (4)

$$\Lambda_s(t) = \Lambda_{s1}(t) + \Lambda_{s2}(t)\Delta t_k$$

① 令

$$\Lambda_{s1}(t) = \Phi(t, \bar{t}_k) \Lambda_s(t_k)$$

则:

$$\dot{\Lambda}_{s1}(t) = \frac{d\Phi(t, \bar{t}_k)}{dt} \Lambda_s(t_k) = -A^T(t) \Phi(t, \bar{t}_k) \Lambda_s(t_k) = -A^T(t) \Lambda_{s1}(t)$$

因此,  $\Lambda_{s1}(t)$  是伴随方程  $\dot{\Lambda}(t) = -A^T(t)\Lambda(t)$  的解

□  $\Lambda_{s1}(t)$  可由伴随方程从  $\Lambda_{s1}(\bar{t}_k)$  反向积分得到

### 计算伴随矢量 (6)

若要求关机方程, 即可通过关机方程伴随系统的终端值  $\Lambda_s(t_k)$ , 求解关机方程伴随量  $\Lambda_s(t)$

$$\Lambda_s(t_k) = \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \right)^T_{t_k} = \left[ \frac{\partial L}{\partial r_x} \bigg|_{t_k}, \frac{\partial L}{\partial r_y} \bigg|_{t_k}, \frac{\partial L}{\partial r_z} \bigg|_{t_k}, \frac{\partial L}{\partial v_x} \bigg|_{t_k}, \frac{\partial L}{\partial v_y} \bigg|_{t_k}, \frac{\partial L}{\partial v_z} \bigg|_{t_k} \right]^T$$

终端条件在  $t_k$  处

**问题: 实际关机时刻  $t_k$  未知, 如何求  $\Lambda_s(t)$ ?**

伴随系统的解:

$$\Lambda_s(t) = \Lambda_{s1}(t) - \Lambda_{s2}(t)\Delta t_k$$

□ 将  $\Lambda(t)$  近似写为伴随量 ( $\Lambda_{s1}(t)$ 、 $\Lambda_{s2}(t)$ ) 的线性组合, 伴随量的终端条件在标称关机时刻  $\bar{t}_k$  处, 且  $t$  时刻的伴随量可由伴随方程从  $\bar{t}_k$  时刻反向积分得到

### 计算伴随矢量 (3)

将  $\Phi(t, t_k)$  对关机时刻  $t_k$  在  $\bar{t}_k$  处泰勒展开:

$$\Phi(t, t_k) = \Phi(t, \bar{t}_k) + \frac{d\Phi(t, t_k)}{dt_k} \bigg|_{t_k=\bar{t}_k} \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_k - \bar{t}_k$$

根据

$$\begin{aligned} \Lambda_s(t) &= \Phi(t, t_k) \Lambda_s(t_k) \\ &= \left( \Phi(t, \bar{t}_k) + \frac{d\Phi(t, t_k)}{dt_k} \bigg|_{t_k=\bar{t}_k} \Delta t_k \right) \Lambda_s(t_k) \\ &= \underbrace{\Phi(t, \bar{t}_k) \Lambda_s(t_k)}_{\Lambda_{s1}(t)} + \underbrace{\left( -\Phi(t, \bar{t}_k) A^T(\bar{t}_k) \Lambda_s(t_k) \right) \Delta t_k}_{\Lambda_{s2}(t)} \end{aligned}$$

将  $\Lambda_s(t)$  近似为两部分求解

$$\Lambda_s(t) = \Lambda_{s1}(t) - \Lambda_{s2}(t)\Delta t_k$$

### 计算伴随矢量 (5)

② 令

$$\Lambda_{s2}(t) = -\Phi(t, \bar{t}_k) A^T(\bar{t}_k) \Lambda_s(t_k) = -\Phi(t, \bar{t}_k) A^T(\bar{t}_k) \Lambda_{s1}(\bar{t}_k) = \Phi(t, \bar{t}_k) \dot{\Lambda}_{s1}(\bar{t}_k)$$

则:

$$\dot{\Lambda}_{s2}(t) = \frac{d\Phi(t, \bar{t}_k)}{dt} \dot{\Lambda}_{s1}(\bar{t}_k) = -A^T(t) \Phi(t, \bar{t}_k) \dot{\Lambda}_{s1}(\bar{t}_k) = -A^T(t) \Lambda_{s2}(t)$$

因此,  $\Lambda_{s2}(t)$  是伴随方程  $\dot{\Lambda}(t) = -A^T(t)\Lambda(t)$  的解

□  $\Lambda_{s2}(t)$  可由伴随方程从  $\Lambda_{s2}(\bar{t}_k) = \dot{\Lambda}_{s1}(\bar{t}_k) = -A^T(\bar{t}_k)\Lambda_{s1}(\bar{t}_k)$  反向积分得到

最后, 根据近似公式, 得到伴随系统的解:

$$\Lambda_s(t) = \Lambda_{s1}(t) - \Lambda_{s2}(t)\Delta t_k$$

### 关机时刻预测

$$\Lambda_s(t) = \Lambda_{s1}(t) - \Lambda_{s2}(t)\Delta t_k$$

则根据伴随定理, 当控制量  $\delta U(t) = 0$  时, 预测的射程的等时偏差为:

$$\delta L[\mathbf{X}(t_k), t_k] = \Lambda_s^T(t) \delta \mathbf{X}(t)$$

进一步得到预测的射程的全偏差为:

$$\begin{aligned} \Delta L[\mathbf{X}(t_k), t_k] &= \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] \Delta t_k + \delta L[\mathbf{X}(t_k), t_k] \\ &= \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] \Delta t_k - \Lambda_{s2}^T(t) \delta \mathbf{X}(t) \Delta t_k + \Lambda_{s1}^T(t) \delta \mathbf{X}(t) \end{aligned}$$

实时判断若在当前时刻关机, 射程偏差是否为零, 即令  $\Delta t_k = t - \bar{t}_k$ , 判断:

$$\Delta L = \left[ \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - \Lambda_{s2}^T(t) \delta \mathbf{X}(t) \right] (t - \bar{t}_k) + \Lambda_{s1}^T(t) [\mathbf{X}(t) - \bar{\mathbf{X}}(t)] = 0?$$

同时, 可得到使关机方程成立的关机时间偏差为:

$$\Delta t_k = - \frac{\Lambda_{s1}^T(t) \delta \mathbf{X}(t)}{\dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - \Lambda_{s2}^T(t) \delta \mathbf{X}(t)}$$

由倾角偏差法向导引方程:

$$\Delta\theta[X(t_k), t_k] = \left[ \frac{\partial\theta}{\partial X} \Big|_{t_k} - \frac{\dot{\theta}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]}{L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{t_k} \right] \delta X(t_k) = 0$$

令伴随系统的终端值:

$$\Lambda_n(t_k) = \left[ \frac{\partial\theta}{\partial X} \Big|_{t_k} - \frac{\dot{\theta}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]}{L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{t_k} \right]^{-T}$$

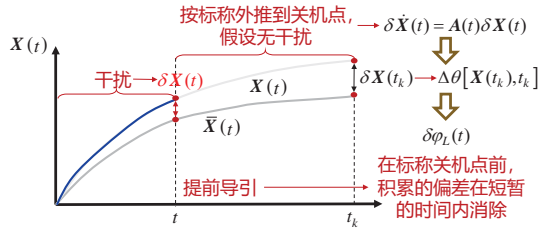
同关机方程伴随量的求解, 计算法向导引方程中伴随系统的解为:

$$\Lambda_n(t) = \Lambda_n(t_k) - \Lambda_{n2}(t) \Delta t_k$$

$\Delta t_k$  由使关机方程成立的关机时间偏差确定

$$\Delta t_k = - \frac{\Lambda_{n1}^T(t_k)}{L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - \Lambda_{n2}^T(t_k) \delta X(t_k)} \delta X(t_k)$$

### 法向导引策略 (2)



根据伴随定理, 假设 $t$ 时刻以后控制量  $\delta U(t) = 0$ 、干扰量  $f(t) = 0$  时, 预测的倾角偏差为:

$$\Delta\theta[X(t_k), t_k] = \Lambda_n^T(t_k) \delta X(t_k) = \Lambda_n^T(t) \delta X(t)$$

则利用俯仰角摄动  $\delta\varphi_L(t)$  反馈控制, 消除 $t$ 时刻之前所有干扰  $\delta X(t)$  对于弹道倾角偏差  $\Delta\theta$  的影响

$$\delta\varphi_L(t) = \mathbf{K}_\psi^T \Delta\theta \quad \text{反馈系数设计需要与姿控一起考虑}$$

### 法向导引简化形式

$$\Delta\theta[X(t_k), t_k] = \Lambda_n^T(t_k) \delta X(t)$$

$$\Lambda_n(t_k) = \left[ \frac{\partial\theta}{\partial X} \Big|_{t_k} - \frac{\dot{\theta}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]}{L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{t_k} \right]^{-T}$$

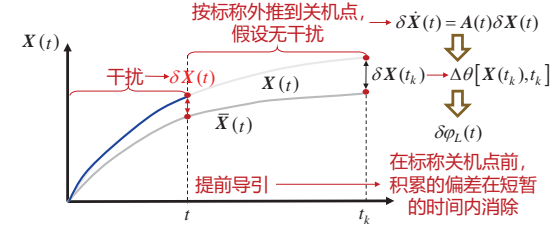
令

$$\left( \frac{\partial\theta}{\partial X} \Big|_{t_k} \right)^T = \left[ \frac{\partial\theta}{\partial r_x} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial\theta}{\partial r_y} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial\theta}{\partial r_z} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial\theta}{\partial v_x} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial\theta}{\partial v_y} \Big|_{t_k} \quad \frac{\partial\theta}{\partial v_z} \Big|_{t_k} \right]^T$$

简化形式的使用条件 (工程经验)

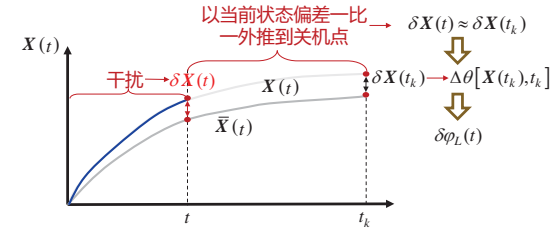
- ①  $\frac{\partial\theta}{\partial v_x} \Big|_{t_k} \gg \frac{\partial\theta}{\partial r_x} \Big|_{t_k}$ ,  $\frac{\partial\theta}{\partial v_y} \Big|_{t_k} \gg \frac{\partial\theta}{\partial r_y} \Big|_{t_k}$ ,  $\frac{\partial\theta}{\partial v_z} \Big|_{t_k} \gg \frac{\partial\theta}{\partial r_z} \Big|_{t_k}$
- ②  $(t_k - t)$  是小量

- > 可忽略 $t$ 时刻速度偏差对 $t_k$ 时刻位置偏差的影响
- > 可忽略 $t$ 时刻位置偏差对 $t_k$ 时刻速度偏差的影响



1. 在主动段飞行中, 由于各种干扰的作用, 实际弹道偏离标准弹道,  $t$ 时刻之前所有干扰作用的效果, 直接反映在 $t$ 时刻的弹道状态偏差  $\delta X(t)$  上
2. 在预测终端偏差时, 从 $t$ 时刻弹道状态偏差  $\delta X(t)$  出发, 按标称条件外推到关机点, 从而得到对应的终端倾角偏差  $\Delta\theta$
3. 法向导引即找到 $t$ 时刻以前干扰作用与终端倾角偏差的关系, 通过控制  $\delta\varphi_L(t)$  消除这一偏差

### 法向导引简化形式



预测倾角偏差时  $\Lambda_n^T(t)$  随时间变化, 实现较为复杂, 可假设  $\delta X(t_k) \approx \delta X(t)$ , 得:

$$\Delta\theta[X(t_k), t_k] = \Lambda_n^T(t_k) \delta X(t) \Leftrightarrow \Delta\theta[X(t_k), t_k] = \Lambda_n^T(t) \delta X(t)$$

当 $t$ 趋近于 $t_k$ 时,  $\delta X(t)$  逐渐逼近  $\delta X(t_k)$ , 在飞行中制导系统不断消除用上式计算得偏差此时,  $\Lambda_n^T(t_k)$  是常向量, 制导计算十分简单

### 横向导引策略

同理, 由落点横向偏差导引方程:

$$\Delta H[X(t_k), t_k] = \left[ \frac{\partial H}{\partial X} \Big|_{t_k} - \frac{\dot{H}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]}{L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{t_k} \right] \delta X(t_k) = 0$$

令伴随系统的终端值:

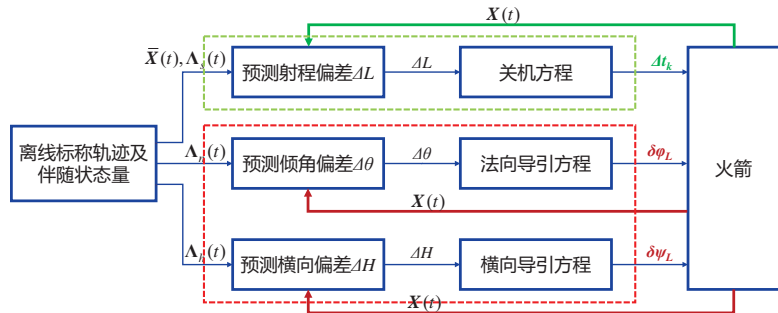
$$\Lambda_h(t_k) = \left[ \frac{\partial H}{\partial X} \Big|_{t_k} - \frac{\dot{H}[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]}{L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{t_k} \right]^{-T}$$

根据伴随定理, 假设 $t$ 时刻以后控制量  $\delta U(t) = 0$ 、干扰量  $f(t) = 0$  时, 预测的横向偏差为:

$$\Delta H[X(t_k), t_k] = \Lambda_h^T(t_k) \delta X(t_k) = \Lambda_h^T(t) \delta X(t)$$

则利用偏航角摄动  $\delta\psi_L(t)$  反馈控制, 消除 $t$ 时刻之前所有干扰  $\delta X(t)$  对于落点横向偏差  $\Delta H$  的影响

$$\delta\psi_L(t) = \mathbf{K}_\psi \Delta H$$

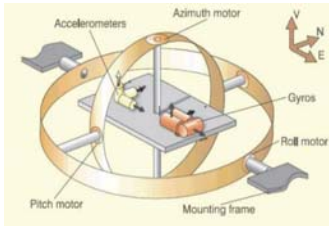


- 关机方程的策略是根据当前状态量偏离标称轨迹的量 $\delta X(t)$ , 预测关机时刻的射程偏差 $\Delta L$ , 然后选择一个使得 $\Delta L=0$ 的**关机时刻**进行关机
- 导引方程的策略是预测由于状态偏差引起的 $\Delta\theta$ 和 $\Delta H$ , 然后利用**控制量 $\delta U(t)$** 实时消除 $\Delta\theta$ 和 $\Delta H$

无导航信息的制导

问题: 无实时导航信息 (位置和速度) 下能否完成制导目标?

- 复杂的导航计算并不是必须的。当火箭不作导航计算, 但制导系统通过测量与计算能够给出作用于火箭的干扰时, 可以实现制导目标。



平台惯性导航 (加速度计+位置陀螺仪)

- 位置陀螺仪测量的是火箭发射惯性系下的俯仰角 $\phi_L$ 、航角 $\psi_L$ 和滚转角 $\gamma_L$
- 加速度计测量的是火箭除引力加速度之外的加速度在发射惯性坐标系中的分量 $a_{mx}$ 、 $a_{my}$ 和 $a_{mz}$ 。
- 火箭在发射惯性系下**位置和速度**可以利用加速度计测量值与引力模型, 对质心运动方程积分得到。

$$\left(\frac{dr_L}{dt}\right)_L = (v)_L$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_L = \begin{bmatrix} a_{mx} \\ a_{my} \\ a_{mz} \end{bmatrix} + (g)_L$$

伴随系统

由线性质心运动方程的紧凑形式:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$

其中, 状态量  $X = [r_x \ r_y \ r_z \ v_x \ v_y \ v_z]^T$ 、控制量  $U = [a_{mx} + \tilde{g}_x \ a_{my} + \tilde{g}_y \ a_{mz} + \tilde{g}_z]^T$

则伴随系统为,  $\dot{\Lambda}(t) = -A^T(t)\Lambda(t)$ ,  $\Lambda = [\lambda_{rx} \ \lambda_{ry} \ \lambda_{rz} \ \lambda_{vx} \ \lambda_{vy} \ \lambda_{vz}]^T$ , 即:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{rx} &= -\frac{\partial g_x}{\partial r_x} \lambda_{vx} - \frac{\partial g_y}{\partial r_x} \lambda_{vy} - \frac{\partial g_z}{\partial r_x} \lambda_{vz} \\ \dot{\lambda}_{ry} &= -\frac{\partial g_x}{\partial r_y} \lambda_{vx} - \frac{\partial g_y}{\partial r_y} \lambda_{vy} - \frac{\partial g_z}{\partial r_y} \lambda_{vz} \\ \dot{\lambda}_{rz} &= -\frac{\partial g_x}{\partial r_z} \lambda_{vx} - \frac{\partial g_y}{\partial r_z} \lambda_{vy} - \frac{\partial g_z}{\partial r_z} \lambda_{vz} \\ \dot{\lambda}_{vx} &= -\lambda_{rx} \\ \dot{\lambda}_{vy} &= -\lambda_{ry} \\ \dot{\lambda}_{vz} &= -\lambda_{rz} \end{aligned}$$

- 摄动制导
- 弹道摄动理论
- 有导航信息的摄动制导
- 无导航信息的摄动制导
- 射程及偏导

关机方程中使用的质心运动方程

质心运动方程:

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= v_x \\ \dot{r}_y &= v_y \\ \dot{r}_z &= v_z \\ \dot{v}_x &= a_{mx} + g_x \\ \dot{v}_y &= a_{my} + g_y \\ \dot{v}_z &= a_{mz} + g_z \end{aligned}$$

构造全量线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= v_x & \dot{r}_x &= v_x \\ \dot{r}_y &= v_y & \dot{r}_y &= v_y \\ \dot{r}_z &= v_z & \dot{r}_z &= v_z \\ \dot{v}_x &= \frac{\partial g_x}{\partial r_x} r_x + \frac{\partial g_x}{\partial r_y} r_y + \frac{\partial g_x}{\partial r_z} r_z + a_{mx} + \tilde{g}_x & \dot{v}_x &= \tilde{g}_x - \frac{\partial g_x}{\partial r_x} \tilde{r}_x - \frac{\partial g_x}{\partial r_y} \tilde{r}_y - \frac{\partial g_x}{\partial r_z} \tilde{r}_z \\ \dot{v}_y &= \frac{\partial g_y}{\partial r_x} r_x + \frac{\partial g_y}{\partial r_y} r_y + \frac{\partial g_y}{\partial r_z} r_z + a_{my} + \tilde{g}_y & \dot{v}_y &= \tilde{g}_y - \frac{\partial g_y}{\partial r_x} \tilde{r}_x - \frac{\partial g_y}{\partial r_y} \tilde{r}_y - \frac{\partial g_y}{\partial r_z} \tilde{r}_z \\ \dot{v}_z &= \frac{\partial g_z}{\partial r_x} r_x + \frac{\partial g_z}{\partial r_y} r_y + \frac{\partial g_z}{\partial r_z} r_z + a_{mz} + \tilde{g}_z & \dot{v}_z &= \tilde{g}_z - \frac{\partial g_z}{\partial r_x} \tilde{r}_x - \frac{\partial g_z}{\partial r_y} \tilde{r}_y - \frac{\partial g_z}{\partial r_z} \tilde{r}_z \end{aligned}$$

- $a_{mx}$ 、 $a_{my}$  和  $a_{mz}$  是测量, 可以准确获得, 因此不考虑对  $a_{mx}$ 、 $a_{my}$  和  $a_{mz}$  求偏差

关机方程

由射程关机方程:

$$\Delta L[X(t_k), t_k] = L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] \Delta t_k + \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{\bar{t}_k} \delta X(t_k) = 0$$

$$\delta X(t_k) = \bar{X}(t_k) - X(t_k)$$

$$\Delta L[X(t_k), t_k] = L[X(t_k), t_k] - L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]$$

$$L[X(t_k), t_k] = P(\bar{t}_k) + L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] \Delta t_k + \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{\bar{t}_k} X(t_k) = L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]$$

$$P(\bar{t}_k) = L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{\bar{t}_k} \bar{X}(t_k)$$

定义关机特征量  $D(t_k)$ :

$$D(t_k) = L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] \Delta t_k + \frac{\partial L}{\partial X} \Big|_{\bar{t}_k} X(t_k)$$

得到火箭的关机条件为:

$$D(t_k) = L[\bar{X}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - P(\bar{t}_k)$$

令伴随系统的终端值:

$$\Lambda(t_k) = \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\bar{t}_k} \right)^T$$

与有导航信息摄动制导中伴随系统的求解方法相同, 根据标称轨迹得到关机方程中伴随系统的解为:

$$\Lambda_s(t) = \Lambda_{s1}(t) - \Lambda_{s2}(t)\Delta t_k$$

根据伴随定理 (注意与有导航信息情况区分):

$$\Lambda_s^T(t_k)\mathbf{X}(t_k) = \Lambda_s^T(0)\mathbf{X}(0) + \int_0^{t_k} \Lambda_s^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【实时】判断若在当前时刻关机, 是否满足关机条件  $D(t_k) = L[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - P(\bar{t}_k)$

即令  $\Delta t_k = t - \bar{t}_k$ , 判断:

$$D(t) = \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k](t - \bar{t}_k) + (\Lambda_{s1}^T(0) - \Lambda_{s2}^T(0)(t - \bar{t}_k))\mathbf{X}(0) + \int_0^{t-\bar{t}_k} \Lambda_{s1}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau - (t - \bar{t}_k) \int_0^{t-\bar{t}_k} \Lambda_{s2}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{U} = [a_{mx} + \tilde{g}_x \quad a_{my} + \tilde{g}_y \quad a_{mz} + \tilde{g}_z]^T$$

$$= L[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - P(\bar{t}_k)?$$

关机特征量的展开式:

$$D(t) = \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k](t - \bar{t}_k) + \Lambda_{s11}(0)r_x(0) + \Lambda_{s12}(0)r_y(0) + \Lambda_{s13}(0)r_z(0) + \Lambda_{s14}(0)v_x(0) + \Lambda_{s15}(0)v_y(0) + \Lambda_{s16}(0)v_z(0) - (t - \bar{t}_k)[\Lambda_{s21}(0)r_x(0) + \Lambda_{s22}(0)r_y(0) + \Lambda_{s23}(0)r_z(0) + \Lambda_{s24}(0)v_x(0) + \Lambda_{s25}(0)v_y(0) + \Lambda_{s26}(0)v_z(0)] + \int_0^{t-\bar{t}_k} [\Lambda_{s14}(\tau)(a_{mx} + \tilde{g}_x) + \Lambda_{s15}(\tau)(a_{my} + \tilde{g}_y) + \Lambda_{s16}(\tau)(a_{mz} + \tilde{g}_z)]d\tau - (t - \bar{t}_k) \int_0^{t-\bar{t}_k} [\Lambda_{s24}(\tau)(a_{mx} + \tilde{g}_x) + \Lambda_{s25}(\tau)(a_{my} + \tilde{g}_y) + \Lambda_{s26}(\tau)(a_{mz} + \tilde{g}_z)]d\tau$$

由倾角偏差法向导引方程:

$$\Delta\theta[\mathbf{X}(t_k), t_k] = \left[ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{X}} \Big|_{\bar{t}_k} - \frac{\partial[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]}{L[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial\mathbf{X}} \Big|_{\bar{t}_k} \right] \delta\mathbf{X}(t_k) = 0$$

同有导航信息下的摄动制导方法, 令伴随系统的终端值:

$$\Lambda(t_k) = \left[ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{X}} \Big|_{\bar{t}_k} - \frac{\partial[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]}{L[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]} \frac{\partial L}{\partial\mathbf{X}} \Big|_{\bar{t}_k} \right]^T$$

同关机方程伴随量的求解, 计算法向导引方程中伴随系统的解为:

$$\Lambda_n(t) = \Lambda_{n1}(t) - \Lambda_{n2}(t)\Delta t_k$$

则关机特征量  $D(t_k)$ :

$$D(t_k) = \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]\Delta t_k + \frac{\partial L}{\partial\mathbf{X}} \Big|_{\bar{t}_k} \mathbf{X}(t_k) = \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]\Delta t_k + \Lambda_s^T(t_k)\mathbf{X}(t_k) = \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]\Delta t_k + \Lambda_s^T(0)\mathbf{X}(0) + \int_0^{t_k} \Lambda_s^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau = \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]\Delta t_k + (\Lambda_{s1}^T(0) - \Lambda_{s2}^T(0)\Delta t_k)\mathbf{X}(0) + \int_0^{t_k} [\Lambda_{s1}^T(\tau) - \Lambda_{s2}^T(\tau)\Delta t_k]\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau$$

整理得:

$$D(t_k) = \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]\Delta t_k + (\Lambda_{s1}^T(0) - \Lambda_{s2}^T(0)\Delta t_k)\mathbf{X}(0) + \int_0^{t_k} \Lambda_{s1}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau - \Delta t_k \int_0^{t_k} \Lambda_{s2}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau$$

□ 飞行过程中没有导航信息, 无法实时获得当前状态量, 故采用积分项来计算关机特征量, 积分项需要从【制导开机】启动积分, 直到关机为止。

由关机条件  $D(t_k) = L[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - P(\bar{t}_k)$ :

$$D(t_k) = \dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k]\Delta t_k + (\Lambda_{s1}^T(0) - \Lambda_{s2}^T(0)\Delta t_k)\mathbf{X}(0) + \int_0^{t_k} \Lambda_{s1}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau - \Delta t_k \int_0^{t_k} \Lambda_{s2}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau = L[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - P(\bar{t}_k)$$

得到预测的关机时间偏差为:

$$\Delta t_k = \frac{L[\bar{\mathbf{X}}(t_k), \bar{t}_k] - P(\bar{t}_k) - \Lambda_{s1}^T(0)\mathbf{X}(0) - \int_0^{t_k} \Lambda_{s1}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau}{\dot{L}[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - \Lambda_{s2}^T(0)\mathbf{X}(0) - \int_0^{t_k} \Lambda_{s2}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau}$$

问题: 能否直接计算关机时间  $\Delta t_k$ ? (当前时间之后的控制量  $U(t)$  未知)

假设时刻以后控制量  $\delta U(t) = 0$ , 且  $t_k - \bar{t}_k$  是小量, 则:

$$\Delta t_k \approx \frac{L[\bar{\mathbf{X}}(t_k), \bar{t}_k] - P(\bar{t}_k) - \Lambda_{s1}^T(0)\mathbf{X}(0) - \int_0^{t_k} \Lambda_{s1}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau - \int_0^{t_k} \Lambda_{s1}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\delta U(\tau)d\tau}{L[\bar{\mathbf{X}}(\bar{t}_k), \bar{t}_k] - \Lambda_{s2}^T(0)\mathbf{X}(0) - \int_0^{t_k} \Lambda_{s2}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau - \int_0^{t_k} \Lambda_{s2}^T(\tau)\mathbf{B}(\tau)\delta U(\tau)d\tau}$$

质心运动方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_x &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \cos(\phi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ax} + g_x \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \sin(\phi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ay} + g_y \\ \dot{v}_z &= -\frac{1}{m} \sin(\psi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Az} + g_z \end{aligned}$$

标称轨迹设计 (标称弹道设计时不考虑气动):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{v}_x \\ \dot{\bar{y}} &= \bar{v}_y \\ \dot{\bar{z}} &= \bar{v}_z \\ \dot{\bar{v}}_x &= \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\phi}_L) + \bar{g}_x \\ \dot{\bar{v}}_y &= \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\phi}_L) + \bar{g}_y \\ \dot{\bar{v}}_z &= -\frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) + \bar{g}_z \end{aligned}$$

➤ 无导航系统时, 无法实时获得状态量, 只能根据位置陀螺仪和加速度计得到火箭发射惯性系下的三轴姿态角  $\phi_L, \psi_L$  和  $\gamma_L$ , 以及除引力加速度之外的加速度  $a_{mx}, a_{my}$  和  $a_{mz}$



在标称轨迹附近，将质心运动方程进行一阶线性展开：

$$\begin{aligned} \delta \dot{r}_x &= \delta v_x \\ \delta \dot{r}_y &= \delta v_y \\ \delta \dot{r}_z &= \delta v_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_x &= \frac{\partial g_x}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_x}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_x}{\partial r_z} \delta r_z + \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L + \frac{1}{m} F_{Ax} \\ \delta \dot{v}_y &= \frac{\partial g_y}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_y}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_y}{\partial r_z} \delta r_z + \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L + \frac{1}{m} F_{Ay} \\ \delta \dot{v}_z &= \frac{\partial g_z}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_z}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_z}{\partial r_z} \delta r_z + \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \delta \psi_L + \frac{1}{m} F_{Az} \end{aligned}$$

思考：质心运动方程中哪些量已知，哪些未知，未知量如何计算？

干扰力部分（气动力加速度）计算

已知测量加速度（视加速度）为除引力加速度之外的加速度

$$\begin{aligned} a_{mx} &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \cos(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ax} \\ a_{my} &= \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \sin(\varphi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Ay} \\ a_{mz} &= -\frac{1}{m} \sin(\psi_L) F_p + \frac{1}{m} F_{Az} \end{aligned}$$

则干扰力（气动力）加速度

**均可测量**

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{m} F_{Ax} = a_{mx} - \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \cos(\varphi_L) F_p \\ f_y &= \frac{1}{m} F_{Ay} = a_{my} - \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \sin(\varphi_L) F_p \\ f_z &= \frac{1}{m} F_{Az} = a_{mz} + \frac{1}{m} \sin(\psi_L) F_p \end{aligned}$$

干扰力可通过标称轨迹和加速度测量值计算得到

法向导引控制

根据干扰抑制原理，利用俯仰角扰动  $\delta \varphi_L(t)$  为控制量，消除干扰  $f(t)$  对于弹道倾角偏差  $\Delta \theta$  的影响

假设无当前状态偏差，即  $\delta X(t) = 0$ ，则：

$$\delta \varphi_L(t) = -[\Lambda_n^T(t)B_n(t)]^{-1} \Lambda_n^T(t)C_n(t)f(t)$$

其中：

$$B_n(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \\ \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

对于一个考虑干扰量  $f(t)$  的线性时变系统：

$$\delta \dot{X}(t) = A(t)\delta X(t) + B(t)\delta U(t) + C(t)f(t)$$

假设当前状态量引起的终端偏差为零，即  $\Lambda^T(t)\delta X(t) = 0$

在每一时刻，用控制量  $\delta U(t)$  引起的终端特征量偏差抑制由于干扰量  $f(t)$  引起的终端特征量偏差，即：

$$\Lambda^T(\tau)B(\tau)\delta U(\tau) + \Lambda^T(\tau)C(\tau)f(\tau) = 0$$

整理得：

$$\delta U(t) = -[\Lambda^T(t)B(t)]^{-1} \Lambda^T(t)C(t)f(t) = K_f(t)f(t)$$

待求量

问题：如何根据量测量计算干扰力加速度？

法向导引方程中使用的质点运动方程

将干扰力部分带入先行展开的质心运动方程：

$$\begin{aligned} \delta \dot{r}_x &= \delta v_x \\ \delta \dot{r}_y &= \delta v_y \\ \delta \dot{r}_z &= \delta v_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_x &= \frac{\partial g_x}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_x}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_x}{\partial r_z} \delta r_z + \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L + a_{mx} - \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \cos(\varphi_L) F_p \\ \delta \dot{v}_y &= \frac{\partial g_y}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_y}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_y}{\partial r_z} \delta r_z + \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \delta \varphi_L - \frac{F_p}{m} \sin(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) \delta \psi_L + a_{my} - \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \sin(\varphi_L) F_p \\ \delta \dot{v}_z &= \frac{\partial g_z}{\partial r_x} \delta r_x + \frac{\partial g_z}{\partial r_y} \delta r_y + \frac{\partial g_z}{\partial r_z} \delta r_z + \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \delta \psi_L + a_{mz} + \frac{1}{m} \sin(\psi_L) F_p \end{aligned}$$

法向导引控制

整理可得控制量  $\delta \varphi_L(t)$  满足方程：

$$\begin{aligned} \delta \varphi_L(t) = & - \left[ -\Lambda_{n4}(t) \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \sin(\bar{\varphi}_L) - \Lambda_{n5}(t) \frac{F_p}{m} \cos(\bar{\psi}_L) \cos(\bar{\varphi}_L) \right]^{-1} \times \\ & [\Lambda_{n4}(t) \left( a_{mx} - \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \cos(\varphi_L) F_p \right) \\ & + \Lambda_{n5}(t) \left( a_{my} - \frac{1}{m} \cos(\psi_L) \sin(\varphi_L) F_p \right) \\ & + \Lambda_{n6}(t) \left( a_{mz} + \frac{1}{m} \sin(\psi_L) F_p \right)] \end{aligned}$$



同法向导引控制，利用偏航角摄动 $\delta\psi_L(t)$ 为控制量，消除干扰 $f(t)$ 对于落点横向偏差 $\Delta H$ 的影响

$$\delta\psi_L(t) = -[\Lambda_h^T(t)B_h(t)]^{-1}\Lambda_h^T(t)C_h(t)f(t)$$

其中：

$$B_h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{F_p}{m}\sin(\bar{\psi}_L)\cos(\bar{\varphi}_L) \\ -\frac{F_p}{m}\sin(\bar{\psi}_L)\sin(\bar{\varphi}_L) \\ -\frac{F_p}{m}\cos(\bar{\psi}_L) \end{bmatrix}, \quad C_h(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_h(t) = \Lambda_{h1}(t) - \Lambda_{h2}(t)\Delta t_k$$

$$f_x = a_{mx} - \frac{1}{m}\cos(\psi_L)\cos(\varphi_L)F_p$$

$$f_y = a_{my} - \frac{1}{m}\cos(\psi_L)\sin(\varphi_L)F_p$$

$$f_z = a_{mz} + \frac{1}{m}\sin(\psi_L)F_p$$

显式制导与隐式制导

显式制导(explicit guidance)

✓ 基于实时状态量信息，采用当前状态与目标点状态计算制导指令（特定参数化），**直接地**使预测的轨迹（由制导指令确定）满足两点边值条件（当前与目标点）。

隐式制导(implicit guidance)

✓ 基于特定的隐式控制函数——状态量组合与相应的标称值（预设的标准轨迹）的小量偏差，计算标称制导指令的偏差量，**间接地**使终端状态满足目标点条件。



问题：摄动制导属于哪种策略？

目录

- 需要速度与待增速度
- 导引方法
- 需要速度的求解1 - Q制导
- 需要速度的求解2 - Lambert制导

整理可得控制量 $\delta\psi_L(t)$ 满足方程：

$$\delta\psi_L(t) = -\left[-\Lambda_{n4}(t)\frac{F_p}{m}\sin(\bar{\psi}_L)\cos(\bar{\varphi}_L) - \Lambda_{n5}(t)\frac{F_p}{m}\sin(\bar{\psi}_L)\sin(\bar{\varphi}_L) - \Lambda_{n6}(t)\frac{F_p}{m}\cos(\bar{\psi}_L)\right]^{-1} \times$$

$$[\Lambda_{n4}(t)\left(a_{mx} - \frac{1}{m}\cos(\psi_L)\cos(\varphi_L)F_p\right) + \Lambda_{n5}(t)\left(a_{my} - \frac{1}{m}\cos(\psi_L)\sin(\varphi_L)F_p\right) + \Lambda_{n6}(t)\left(a_{mz} + \frac{1}{m}\sin(\psi_L)F_p\right)]$$

制导与控制原理



闭环制导  
(大气层外上升段制导)

张冉  
自主系统与飞行控制实验室  
北京航空航天大学宇航学院

2023 春

目录

- 需要速度与待增速度
- 导引方法
- 需要速度的求解1 - Q制导
- 需要速度的求解2 - Lambert制导

□ 大气层内  
动力学方程

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{F_p}{m} + \frac{F_A}{m} + g(r)$$

制导指令

特点: 气动力影响显著, 重力场影响小

摄动制导: 对姿态角、发动机关机时间进行离线设计

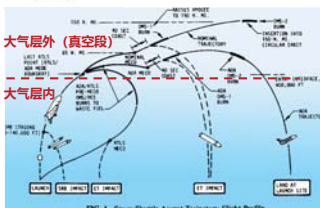
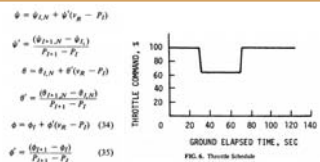
□ 大气层外  
动力学方程

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{F_p}{m} + g(r)$$

制导指令

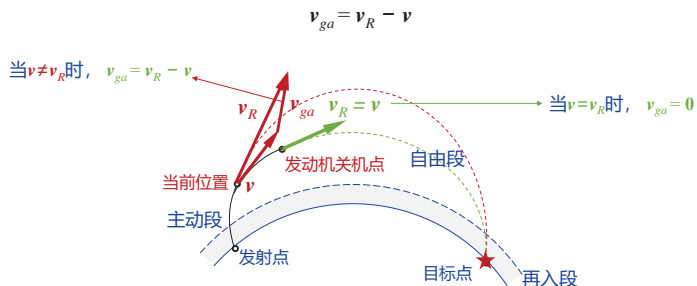
特点: 气动力影响小, 重力场影响显著

闭环制导: 在简化条件下, 得到运动方程的显式解 (解析或数值), 基于制导误差进行全量反馈调节

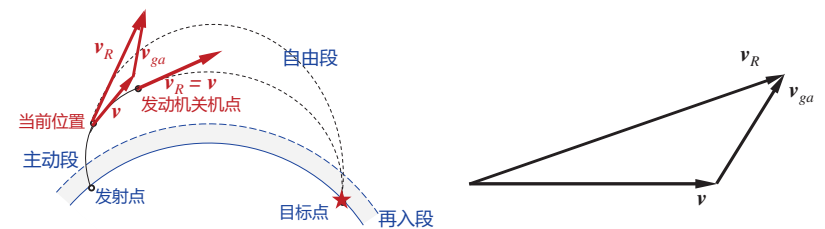


待增速度

待增速度: 需要速度与当前实际速度之差



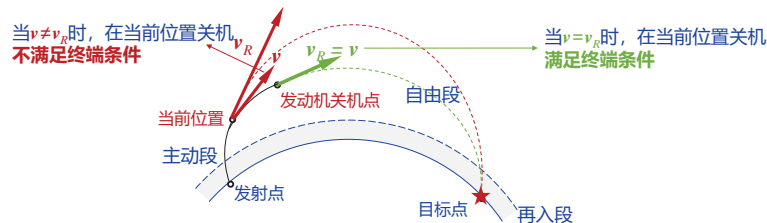
导引目标



需要速度是指, 在当前位置矢量  $r(t)$  时, 如果以需要速度  $v_R(t)$  关机, 可以完成制导任务。

$$v_R = f(r(t), t)$$

在《制导与控制原理》这门课中假设需要速度  $v_R$  为当前位置矢量与当前时间相关的函数 (注: 此假设仅针对特定制导任务, 如, 给定时间内到达终端位置)



目录

- 需要速度与待增速度
- 导引方法
- 需要速度的求解1 - Q制导
- 需要速度的求解2 - Lambert制导

大气层外火箭质心运动方程

惯性系下的质心运动方程

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_p + F_A + F_I}{m} + g$$

在大气层外, 忽略气动力  $F_A=0$  和发动机摆动惯性力  $F_I=0$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_p}{m} + g$$

令  $\frac{dv}{dt} = a$ ,  $\frac{F_p}{m} = a_p$ , 则

$$a = a_p + g$$

推力加速度 + 引力加速度

问题: 如何控制推力加速度, 实现导引目标?

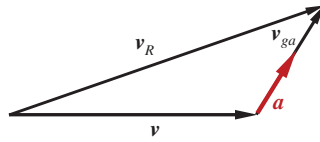
□ 导引原则：加速度方向与待增速度 $v_{ga}$ 方向相同

加速度方向与待增速度 $v_{ga}$ 方向相同可表示为：

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{v}_{ga}}{|\mathbf{v}_{ga}|}$$

则：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v}_{ga} = 0$$



由运动方程  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_p}{m} + \mathbf{g}$ ，得推力指令形式为：

$$\mathbf{F}_p = F_p \frac{\mathbf{a}_p}{|\mathbf{a}_p|} = F_p \frac{\mathbf{a} - \mathbf{g}}{|\mathbf{a} - \mathbf{g}|} = F_p \frac{\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}_{ga}|} \mathbf{v}_{ga} - \mathbf{g}}{\left| \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}_{ga}|} \mathbf{v}_{ga} - \mathbf{g} \right|} = F_p \frac{\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}_{ga}|} \mathbf{v}_{ga} - \mathbf{g}}{\left| \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}_{ga}|} \mathbf{v}_{ga} - \mathbf{g} \right|}$$

导引策略2 (叉积导引1)

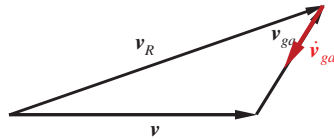
□ 导引原则：待增速度导数负方向与待增速度 $v_{ga}$ 方向相同

待增速度导数负方向与待增速度 $v_{ga}$ 方向相同可表示为：

$$\frac{\dot{\mathbf{v}}_{ga}}{|\dot{\mathbf{v}}_{ga}|} = -\frac{\mathbf{v}_{ga}}{|\mathbf{v}_{ga}|}$$

即：

$$\dot{\mathbf{v}}_{ga} \times \mathbf{v}_{ga} = 0$$



□ 一种简单的工程实现方式：通过动态调节推力方向，消除待增速度

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} F_p \\ F_p \end{pmatrix} = k \dot{\mathbf{v}}_{ga} \times \mathbf{v}_{ga}$$

导引策略2- (叉积导引3)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_p \times \mathbf{v}_{ga}) \times \mathbf{v}_{ga} &= (\mathbf{p} \times \mathbf{v}_{ga}) \times \mathbf{v}_{ga} \\ &\Downarrow \\ &(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned}$$

导引方程左右两端分别为：

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_p \times \mathbf{v}_{ga}) \times \mathbf{v}_{ga} &= \mathbf{v}_{ga} (\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v}_{ga}) - \mathbf{a}_p (\mathbf{v}_{ga} \cdot \mathbf{v}_{ga}) = (\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v}_{ga}) \mathbf{v}_{ga} - v_{ga}^2 \mathbf{a}_p \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{v}_{ga}) \times \mathbf{v}_{ga} &= \mathbf{v}_{ga} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_{ga}) - \mathbf{p} (\mathbf{v}_{ga} \cdot \mathbf{v}_{ga}) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_{ga}) \mathbf{v}_{ga} - v_{ga}^2 \mathbf{p} \end{aligned}$$

导引方程可转化为：

$$(\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v}_{ga}) \mathbf{v}_{ga} - v_{ga}^2 \mathbf{a}_p = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_{ga}) \mathbf{v}_{ga} - v_{ga}^2 \mathbf{p}$$

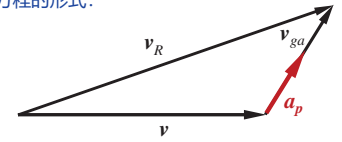
□ 导引原则：推力加速度方向与待增速度 $v_{ga}$ 方向相同

假设推力远大于引力，加速度约等于推力加速度，可简化导引方程的形式：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v}_{ga} = 0$$

$$\mathbf{a} \approx \mathbf{a}_p \Downarrow$$

$$\mathbf{a}_p \times \mathbf{v}_{ga} = 0$$



即：

$$\frac{\mathbf{a}_p}{|\mathbf{a}_p|} = \frac{\mathbf{v}_{ga}}{|\mathbf{v}_{ga}|}$$

则推力指令形式为：

$$\mathbf{F}_p = F_p \frac{\mathbf{a}_p}{|\mathbf{a}_p|} = F_p \frac{\mathbf{v}_{ga}}{|\mathbf{v}_{ga}|}$$

导引策略2 (叉积导引2)

$$\dot{\mathbf{v}}_{ga} \times \mathbf{v}_{ga} = 0$$

由需用速度变化率可写为：

$$\dot{\mathbf{v}}_{ga} = \dot{\mathbf{v}}_R - \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_R - \mathbf{g} - \mathbf{a}_p$$

定义矢量  $\mathbf{p}$  为：

$$\mathbf{p} = \dot{\mathbf{v}}_R - \mathbf{g}$$

则导引方程可表示为：

$$(\mathbf{p} - \mathbf{a}_p) \times \mathbf{v}_{ga} = 0$$

即：

$$\mathbf{a}_p \times \mathbf{v}_{ga} = \mathbf{p} \times \mathbf{v}_{ga}$$

对上式右叉乘矢量  $\mathbf{v}_{ga}$ ，得：

$$(\mathbf{a}_p \times \mathbf{v}_{ga}) \times \mathbf{v}_{ga} = (\mathbf{p} \times \mathbf{v}_{ga}) \times \mathbf{v}_{ga}$$

导引策略2- (叉积导引4)

$$(\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v}_{ga}) \mathbf{v}_{ga} - v_{ga}^2 \mathbf{a}_p = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_{ga}) \mathbf{v}_{ga} - v_{ga}^2 \mathbf{p}$$

定义单位矢量和标量  $q$ ：

$$\mathbf{i}_{v_{ga}} = \frac{\mathbf{v}_{ga}}{|\mathbf{v}_{ga}|}, \quad q = \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{i}_{v_{ga}}$$

则导引方程为：

$$v_{ga}^2 q \mathbf{i}_{v_{ga}} - v_{ga}^2 \mathbf{a}_p = v_{ga}^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_{v_{ga}}) \mathbf{i}_{v_{ga}} - v_{ga}^2 \mathbf{p}$$

即：

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{p} + \left[ q - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_{v_{ga}}) \right] \mathbf{i}_{v_{ga}}$$

$$a_p = p + [q - (p \cdot i_{v_{ga}})] i_{v_{ga}}$$

将上式两侧平方，可以计算标量 $q$

$$a_p \cdot a_p = [p + [q - (p \cdot i_{v_{ga}})] i_{v_{ga}}] \cdot [p + [q - (p \cdot i_{v_{ga}})] i_{v_{ga}}]$$

$$a_p^2 = p^2 + [q - (p \cdot i_{v_{ga}})]^2 + 2[q - (p \cdot i_{v_{ga}})] p \cdot i_{v_{ga}}$$

$$= p^2 + q^2 + (p \cdot i_{v_{ga}})^2 - 2q(p \cdot i_{v_{ga}}) + 2q(p \cdot i_{v_{ga}}) - 2(p \cdot i_{v_{ga}})^2$$

$$= p^2 + q^2 - (p \cdot i_{v_{ga}})^2$$

$$q = \pm \sqrt{a_p^2 - p^2 + (p \cdot i_{v_{ga}})^2}$$

$$q = +\sqrt{a_p^2 - p^2 + (p \cdot i_{v_{ga}})^2} \quad \begin{matrix} q = a_p \cdot i_{v_{ga}} \\ p = \dot{v}_R - g \end{matrix}$$

可直接测量

- 根据  $a_p = p + [q - (p \cdot i_{v_{ga}})] i_{v_{ga}}$  可以计算推力加速度指令
- 如果推力加速度大小  $a_T$  不够大，则标量  $q$  无解，无法采用叉积导引。
- 当叉积导引无效时，可以采用导引策略1（推力加速度方向与待增速度方向相同）。

导引策略2 (叉积导引7)

$p \cdot v_{ga} \rightarrow \dot{v}_{ga}$  的方向  $\xrightarrow{\text{推力大小}} a_p$   $\rightarrow$  当  $a_p$  与  $v_{ga}$  垂直时， $a_p$  为最小值， $q=0$

$a_p = \sqrt{p^2 - (p \cdot \cos\langle p, v_{ga} \rangle)^2}$

$$q = \sqrt{a_p^2 - p^2 + (p \cdot i_{v_{ga}})^2}$$

当  $a_p^2 - p^2 + (p \cdot i_{v_{ga}})^2 < 0$

即  $a_p < \sqrt{p^2 - (p \cdot \cos\langle p, v_{ga} \rangle)^2}$  时， $q$  无解

$\dot{v}_{ga} \times v_{ga} = 0$   
 $p = \dot{v}_R - g \quad q = a_p \cdot i_{v_{ga}} \geq 0$

导引策略3

- 采用导引策略1和导引策略12相结合的方式，将待增速度  $v_{ga}$  导引至零

导引策略1:  $a_p \times v_{ga} = 0 \Rightarrow c(t) a_p \times v_{ga} + (1-c(t)) \dot{v}_{ga} \times v_{ga} = 0$

导引策略2:  $\dot{v}_{ga} \times v_{ga} = 0$

其中，当  $c(t)=1$  时，等同于导引策略1；当  $c(t)=0$  时，等同于导引策略2。

对上式两边同时乘以  $(\dot{v}_{ga} \times v_{ga})^T$ ，可求解参数  $c(t)$  的形式：

$$c(t) (\dot{v}_{ga} \times v_{ga})^T (a_p \times v_{ga}) + (1-c(t)) (\dot{v}_{ga} \times v_{ga})^T (\dot{v}_{ga} \times v_{ga}) = 0$$

$$c(t) = \frac{|\dot{v}_{ga} \times v_{ga}|^2}{|\dot{v}_{ga} \times v_{ga}|^2 - (\dot{v}_{ga} \times v_{ga})^T (a_p \times v_{ga})}$$

- 选择参数  $c(t)$  得到最优推力加速度指令  $a_p$ ，从而得到最优推力指令  $F_p$

导引策略对比

$v_R$  : 需要速度  
 $v$  : 实际速度  
 $v_{ga} = v_R - v$  : 待增速度  
 $g$  : 当地重力加速度矢量  
 $a_p$  : 推力加速度矢量  
 $\dot{v}_{ga} = \dot{v}_R - \dot{v} = \dot{v}_R - g - a_p = p - a_p$

导引策略1:  $c(t)=1$   
 $a_p \times v_{ga} = 0$

导引策略2:  $c(t)=0$   
 $\dot{v}_{ga} \times v_{ga} = 0$

导引策略3:  $0 \leq c(t) \leq 1$   
 $v_{ga} \times ((c-1)p - a_p) = 0$

目录

- 需要速度与待增速度
- 导引方法
- 需要速度的求解1 - Q制导
- 需要速度的求解2 - Lambert制导

由待增速度定义

$$v_{ga} = v_R - v$$

则待增速度随时间的导数为：

$$\frac{dv_{ga}}{dt} = \frac{dv_R}{dt} - \frac{dv}{dt}$$

根据质心运动方程  $\frac{dv}{dt} = a_p + g$ ，得

$$\frac{dv_{ga}}{dt} = \frac{dv_R}{dt} - g - a_p$$

如何获得需要速度变化率

由需要速度变化率：

$$\frac{dv_R}{dt} = g - \frac{\partial v_R}{\partial r} v_{ga}$$

带入待增速度变化率为：

$$\frac{dv_{ga}}{dt} = \frac{dv_R}{dt} - g - a_p = g - \frac{\partial v_R}{\partial r} v_{ga} - g - a_p = -\frac{\partial v_R}{\partial r} v_{ga} - a_p$$

定义Q矩阵为：

$$Q = \frac{\partial v_R}{\partial r}$$

则待增速度变化率可进一步写为：

$$\frac{dv_{ga}}{dt} = -Q v_{ga} - a_p$$

在线计算待增速度

待增速度满足微分方程

$$\frac{dv_{ga}}{dt} = -Q v_{ga} - a_p$$

其中：

- Q矩阵是可离线计算的时变矩阵；
- 通过Q矩阵计算，隐式地依赖重力场
- $a_p$  是发动机推力加速度，加速度计直接测量。

对上式进行积分，即可得到  $v_{ga}$ 。

然而，实变矩阵Q的存储和运算是困难的。因此，Q制导主要应用场景为：当主动段地心转角较小时，可将Q矩阵视作常值矩阵。

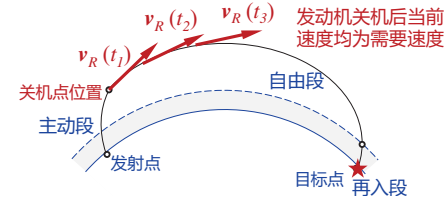
假设：需要速度只是当前位置和时间的函数  $v_R(r(t), t)$

$$\frac{dv_R}{dt} = \frac{\partial v_R}{\partial t} + \frac{\partial v_R}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial v_R}{\partial t} + \frac{\partial v_R}{\partial r} v = \frac{\partial v_R}{\partial t} + \frac{\partial v_R}{\partial r} (v_R - v_{ga}) = g - \frac{\partial v_R}{\partial r} v_{ga}$$

问题：为什么  $\frac{\partial v_R}{\partial t} + \frac{\partial v_R}{\partial r} v_R = g$

□ 回顾需要速度：当前速度等于需要速度，发动机关机，待增速度为0，飞行器仅受引力加速度作用做开普勒轨道滑行，则需要速度的变化率等于引力加速度

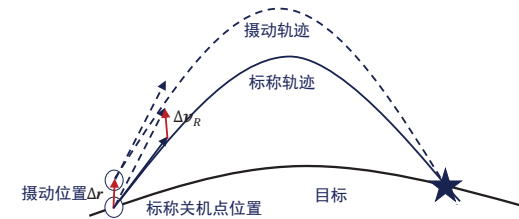
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v_R}{\partial r} v_R + \frac{\partial v_R}{\partial t} = g$$



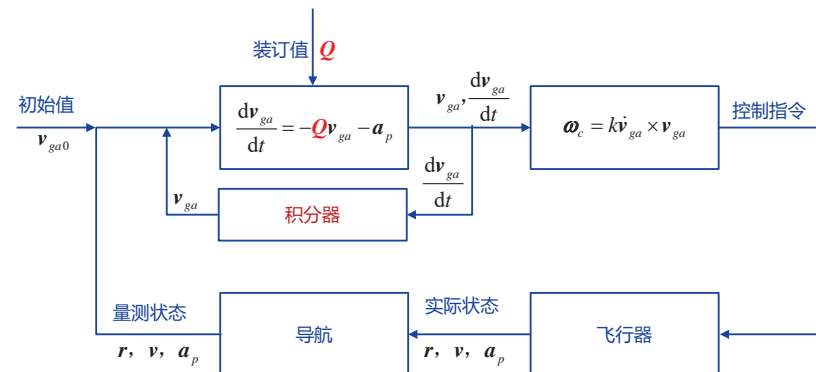
数值方法计算Q矩阵

$$Q = \frac{\partial v_R}{\partial r}$$

➢ 假设位置相对于标称轨迹存在一定摄动，则可以得到相应的期望速度变化，当摄动足够小时即可得到期望速度相对于位置在标称时刻的导数



Q制导框架



发动机关机后自由段的运动方程

$$\frac{dv}{dt} = g$$

$$\frac{dr}{dt} = v$$

对上述运动方程积分，可得到终点的速度、位置为：

$$v_T = v_R + (t_F - t)g$$

$$r_T = r_R + (t_F - t)v_R + \frac{1}{2}(t_F - t)^2 g$$

其中， $t_F$ 是终端时间。  
则需用速度可写为：

$$v_R = \frac{1}{(t_F - t)} \left( r_T - r_R - \frac{1}{2}(t_F - t)^2 g \right)$$

常引力场下Q制导实例-最优导引律 (1)

$$\frac{dv_{ga}}{dt} = \frac{1}{(t_F - t)} v_{ga} - a_p$$

对上述方程和 $v_{ga}$ 求标量积：

$$\frac{d}{dt}(v_{ga} \cdot v_{ga}) = 2v_{ga} \cdot \frac{dv_{ga}}{dt} = 2v_{ga} \cdot \left[ \frac{1}{(t_F - t)} v_{ga} - a_p \right] = \frac{2}{(t_F - t)} v_{ga}^2 - 2a_p \cdot v_{ga}$$

则：

$$(t_F - t) \frac{dv_{ga}^2}{dt} = 2v_{ga}^2 - 2(t_F - t)a_p \cdot v_{ga}$$

对上式从当前时刻  $t$  到关机时刻  $t_k$  进行积分

$$\int_0^{t_k} (t_F - t) dv_{ga}^2 = \int_0^{t_k} [2v_{ga}^2 - 2(t_F - t)a_p \cdot v_{ga}] dt$$

目录

- 需要速度与待增速度
- 导引方法
- 需要速度的求解1 - Q制导
- 需要速度的求解2 - Lambert制导

$$v_R = \frac{1}{(t_F - t)} \left( r_T - r_R - \frac{1}{2}(t_F - t)^2 g \right)$$

则Q矩阵可计算得：

$$Q = \frac{\partial v_R}{\partial r_R} = -\frac{1}{(t_F - t)} I$$

则待增速度可写为：

$$\frac{dv_{ga}}{dt} = -Qv_{ga} - a_p = \frac{1}{(t_F - t)} v_{ga} - a_p$$

常引力场下Q制导实例-最优控制律 (2)

$$\int_0^{t_k} (t_F - t) dv_{ga}^2 = \int_0^{t_k} [2v_{ga}^2 - 2(t_F - t)a_p \cdot v_{ga}] dt$$

等式左端通过分部积分得：

$$\int_0^{t_k} (t_F - t) dv_{ga}^2 = (t_F - t)v_{ga}^2 \Big|_0^{t_k} + \int_0^{t_k} v_{ga}^2 dt = \int_0^{t_k} v_{ga}^2 dt - (t_F - t_0)v_{ga}^2$$

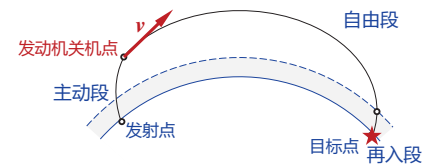
$v_{ga}(t_k) = 0$

则：

$$\int_0^{t_k} [2(t_F - t)a_p \cdot v_{ga} - v_{ga}^2] dt = (t_F - t_0)v_{ga}^2$$

- 对于任意时间 $t$ ，为了最小化发动机剩余燃烧时间  $(t_F - t)$ ，应当最大化  $a_p \cdot v_{ga}$ ，即推力加速度与待增速度矢量同向。
- 注意：最优控制律与  $a_p(t)$  的历史时间无关，只与当前时刻有关

Lambert问题的描述



Lambert问题，即已知飞行器初始位置 $r$ ，并希望飞行器能在目标时间 $t_F$ 到达目标位置 $r_T$ ，那么如何获得飞行器的当前需要速度

$$\begin{matrix} x(0) = x_0 & x(t_F) = x_F & \dot{x}(0) = ? \\ y(0) = y_0 & y(t_F) = y_F & \dot{y}(0) = ? \\ z(0) = z_0 & z(t_F) = z_F & \dot{z}(0) = ? \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

由二体问题的推导, 可以得到飞行器自由飞行的开普勒轨道方程为

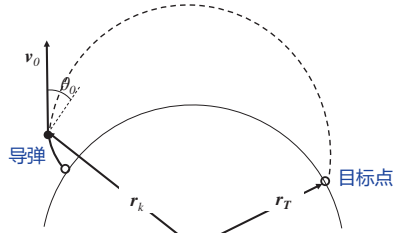
$$\frac{r_0}{r_T} = \frac{1 - \cos \theta_0 + \cos(\phi + \theta_0)}{\lambda \cos^2 \theta_0 + \cos \theta_0}$$

$$\phi = \cos^{-1} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_T}{|\mathbf{r}_0| |\mathbf{r}_T|}$$

$$\lambda = \frac{v_0^2 r_0}{GM}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM(1 - \cos \phi)}{r_0 \cos \gamma [(r_0 \cos \gamma / r_T) - \cos(\phi + \gamma)]}}$$

$$t_{go} = \frac{r_0}{V \cos \gamma} \left\{ \frac{\tan \gamma (1 - \cos \phi) + (1 - \lambda) \sin \phi}{(2 - \lambda) \left[ \frac{1 - \cos \phi}{\lambda \cos^2 \gamma} + \frac{\cos(\gamma + \phi)}{\cos \gamma} \right]} + \frac{2 \cos \gamma}{\lambda [(2/\lambda) - 1]^{1.5}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{(2/\lambda) - 1}}{\cos \gamma \cot(\phi/2) - \sin \gamma} \right) \right\}$$



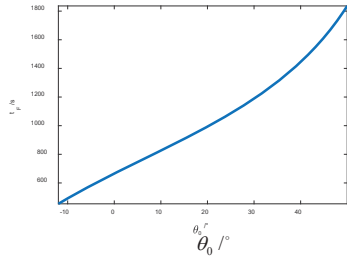
$$\phi = f_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_T)$$

$$v_0 = f_2(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_T, \phi, \theta_0)$$

$$t_{go} = f_3(v_0, \phi, \theta_0)$$

↓

$$t_{go} = f_3(f_2(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_T, f_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_T), \theta_0), f_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_T), \theta_0)$$



目录

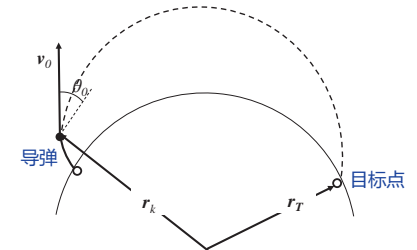
1. 大气层外制导的两点边值问题
2. 显式制导
3. 最优显式制导

以上可表示为简化形式, 即Lambert问题的闭环解析解

$$\phi = f_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_T)$$

$$v_0 = f_2(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_T, \phi, \theta_0)$$

$$t_{go} = f_3(v_0, \phi, \theta_0)$$



求解此方程, 即可得到需要速度的大小和速度倾角, 投影到目标坐标系即可得到需要速度的矢量形式

制导与控制原理



显式制导  
(大气层外制导)

张冉  
自主系统与飞行控制实验室  
北京航空航天大学宇航学院

2023 春

目录

1. 大气层外制导的两点边值问题
2. 显式制导
3. 最优显式制导

1) 动力学常微分方程:

$$\dot{r}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = g(r) + a_p(t)$$

2) 两点边值条件:

当前时刻  $t_0$  的位置和速度:  $r(t_0) = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$   
 $v(t_0) = [\dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0]^T$  ← 导航系统提供

终端时刻  $t_f$  的位置和速度:  $r(t_f) = [x_f \ y_f \ z_f]^T$   
 $v(t_f) = [\dot{x}_f \ \dot{y}_f \ \dot{z}_f]^T$  ← 与闭环制导终端约束的区别?

3) 实际控制量:

推力矢量  
幅值+方向

$$F_p(t) = F_p \frac{a_p(t)}{|a_p(t)|} = F_p \frac{[a_{px}(t) \ a_{py}(t) \ a_{pz}(t)]^T}{\sqrt{a_{px}^2(t) + a_{py}^2(t) + a_{pz}^2(t)}}$$

求解两点边值问题

□ 三轴运动是互相解耦的，分别考虑每一个轴的控制，以x轴为例，两点边值问题为:

1) 动力学常微分方程:

$$\ddot{x}(t) = g_x(x) + a_{px}(t)$$

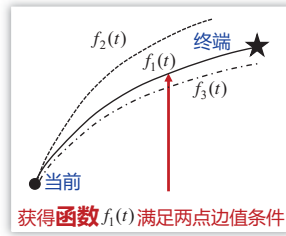
2) 两点边值条件:

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

$$x(t_f) = x_f \quad \dot{x}(t_f) = \dot{x}_f$$

3) 实际控制量:

$$a_{px}(t)$$



问题: 如何求解单通道的两点边值问题?

更换控制量: “总”加速度

□ 思路: 直接设计加速度函数  $\ddot{x}(t)$ , 满足两点边值问题:

1) 两点边值条件:

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

$$x(t_f) = x_f \quad \dot{x}(t_f) = \dot{x}_f$$

2) 选择“总”加速度作为(虚拟)控制量:

$$\ddot{x}(t)$$

□ 确定  $\ddot{x}(t)$  函数后, 调整推力加速度使得  $a_{px}(t)$  与  $g_x(t)$  的和等于  $\ddot{x}(t)$  即可:

$$a_{px}(t) = \ddot{x}(t) - g_x(t)$$

问题: 如何设计总加速度函数?

- 1. 大气层外制导的两点边值问题
- 2. 显式制导
- 3. 最优显式制导

回顾: 引力场模型

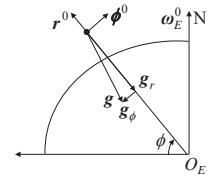
□ 在椭球模型下, 引力加速度与距离  $r$  和地心纬度  $\phi$  有关

$$g = g_r r^0 + g_\phi \phi^0$$

$$g_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} = -\frac{GM}{r^2} \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \sin 2\phi$$

$$g_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} \left[ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 (3\sin^2 \phi - 1) \right]$$

$$J_2 = 1.08263 \times 10^{-3}$$



- >  $g_r$  为地球球心指向火箭质心的方向的引力加速度分量
- >  $g_\phi$  为在火箭质心所在子午面内指向北方向的引力加速度分量
- >  $r^0$  为地球球心指向火箭当前质心位置的单位矢量
- >  $\phi^0$  为在当地的拟水平面上, 与  $r^0$  矢量垂直指北的单位向量

□ 引力加速度具有强非线性特征, 求导、积分等操作困难

“总”加速度函数的参数化设计 (1)

□ 将  $\ddot{x}(t)$  表示为广义傅里叶级数,  $\ddot{x}(t)$  的解有无穷多个 (无穷维的未知系数 (自由度)  $a_i$ )

$$\ddot{x}(t) = a_0 + a_1(t_f - t) + a_2(t_f - t)^2 + \dots + a_n(t_f - t)^n + \dots$$

不同制导任务中, 根据需要满足的终端条件, 将级数截断, 可唯一确定  $\ddot{x}(t)$  的解。

□ 例如: 需要满足当前和终端的位置和速度约束:

当前和终端的速度:  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \quad \dot{x}(t_f) = \dot{x}_f \xrightarrow{\text{一次积分}} \dot{x}_f - \dot{x}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \ddot{x}(t) dt$

当前和终端的位置:  $x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f \xrightarrow{\text{二次积分}} x_f - x_0 - \dot{x}(t_0) t_{go} = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t \ddot{x}(s) ds \right] dt$

$t_{go} = t_f - t_0$ : 剩余飞行时间

两个方程确定两个参数 (两个自由度)



需要满足的两个方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}_f - \dot{x}_0 &= \int_{t_0}^{t_f} \ddot{x}(t) dt \\ x_f - x_0 - \dot{x}(t_0)t_{go} &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t \ddot{x}(s) ds \right] dt \end{aligned}$$

将  $\ddot{x}(t)$  的自由度限定为两个:

$$\ddot{x}(t) = c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t)$$

- $p_1(t)$  和  $p_2(t)$ : 事先给定的时间的线性无关函数
- $c_1$  和  $c_2$ : 为满足上述方程需要待求解的参数

**问题: 如何判断  $P_1(t)$  与  $P_2(t)$  是否线性无关?**

### 制导参数的计算 (1)

满足两个方程:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t) \\ \dot{x}_f - \dot{x}_0 &= \int_{t_0}^{t_f} \ddot{x}(t) dt = f_{11}c_1 + f_{12}c_2 \\ x_f - x_0 - \dot{x}(t_0)t_{go} &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t \ddot{x}(s) ds \right] dt = f_{21}c_1 + f_{22}c_2 \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \int_{t_0}^{t_f} p_1(t) dt, \quad f_{21} = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t p_1(s) ds \right] dt \\ f_{12} &= \int_{t_0}^{t_f} p_2(t) dt, \quad f_{22} = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t p_2(s) ds \right] dt \end{aligned}$$

即:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{F} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

➤ 假设  $p_1(t)$  和  $p_2(t)$  是可积函数, 则  $f_{ij}$  是  $t_0$  和  $t_f$  的简单的代数函数。

### 实际制导指令计算

□ 当火箭发动机推力可调时, 给定的推力加速度矢量可由推力大小和姿态角实现

给定推力加速度: 
$$\mathbf{a}_p = \begin{bmatrix} a_{px} & a_{py} & a_{pz} \end{bmatrix}^T = \frac{F_{pe}}{m} \begin{bmatrix} \cos \varphi_c \cos \psi_c \\ \sin \varphi_c \cos \psi_c \\ -\sin \psi_c \end{bmatrix}$$



发动机推力指令: 
$$F_{pe}(t) = m \sqrt{a_{px}^2(t) + a_{py}^2(t) + a_{pz}^2(t)}$$

俯仰角指令: 
$$\varphi_c(t) = \text{atan} \frac{a_{py}(t)}{a_{px}(t)}$$

偏航角指令: 
$$\psi_c(t) = -\text{asin} \frac{a_{pz}(t)}{\sqrt{a_{px}^2(t) + a_{py}^2(t) + a_{pz}^2(t)}}$$

### 线性相关与线性无关

设  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  是定义在区间  $I$  上的函数, 若存在不全为 0 的常数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使得:

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x) = 0$$

则称  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  线性相关; 否则, 称线性无关, 即若

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x) = 0$$

则  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 。

□  $P_1(t)$  与  $P_2(t)$  线性无关, 即若  $k_1 P_1(t) + k_2 P_2(t) = 0$ , 当且仅当  $k_1 = k_2 = 0$

### 制导参数的计算 (2)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{F} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

则  $c_1$  和  $c_2$  的解为:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{E} \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

其中,  $\mathbf{E}$  矩阵是  $\mathbf{F}$  矩阵的逆矩阵, 即:

$$\begin{aligned} e_{11} &= f_{22} / \Delta, \quad e_{12} = -f_{12} / \Delta \\ e_{21} &= -f_{21} / \Delta, \quad e_{22} = f_{11} / \Delta \\ \Delta &= f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} \end{aligned}$$

则推力加速度指令为:

$$a_{px}(t) = \ddot{x}(t) - g_x(t) = c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t) - g_x(t)$$

### 实例

选取  $p_1(t)$  和  $p_2(t)$ :

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = t_f - t$$

其中,  $p_1(t)$  和  $p_2(t)$  满足: (1) 时间的线性无关函数; (2) 可积函数。

证明  $P_1(t)$  与  $P_2(t)$  线性无关:

令:  $k_1 p_1(t) + k_2 p_2(t) = 0$

则:  $k_1 + k_2(t_f - t) = 0$

即:  $(k_1 + k_2 t_f) - k_2 t = 0$

则:  $k_1 = k_2 = 0$

证毕。

$$p_1(t) = 1, p_2(t) = t_f - t$$

则,  $c_1$  和  $c_2$  的解为:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/t_{go} & -6/t_{go}^2 \\ -6/t_{go}^2 & 12/t_{go}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

则  $x$  轴需要的总的加速度:

$$\ddot{x}(t) = c_1 + c_2(t_f - t)$$

则  $x$  轴的推力加速度为:

$$a_{p_x}(t) = \ddot{x}(t) - g_x(t) = c_1 + c_2(t_f - t) - g_x(t)$$

## 显式制导中的“预测-校正”框架

195

### □ 预测-校正

假设  $t_0 \leq t \leq t_f$  内  $\ddot{x}(t)$  恒等于零 (“总”加速度“无控”), 则:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/t_{go} & -6/t_{go}^2 \\ -6/t_{go}^2 & 12/t_{go}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

$\dot{x}_f - \dot{x}_0$  → 速度项  $\dot{x}$  在  $t = t_f$  时的误差  
 $x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go})$  → 位置项  $x$  在  $t = t_f$  时的误差

即, **预测** 终端误差, 基于参数化的控制规律, **校正** 系数  $c_1$  和  $c_2$ , 消除 (预测的) 终端误差:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{预测的终端速度误差} \\ \text{预测的终端位置误差} \end{bmatrix}$$

这些系数确定了可以校正预测的终端误差的  $\ddot{x}(t)$  的方案:

$$\text{加速度指令} = c_1 + c_2(t_f - t)$$

## 显式制导在线应用 (2): E 矩阵分析

197

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/t_{go} & -6/t_{go}^2 \\ -6/t_{go}^2 & 12/t_{go}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

➤ 当  $t_{go}$  变得越来越小时, **E 矩阵的各元素值将变得越来越大**, 这种性质是 **E 矩阵元素** 的典型情况, 与  $p_1(t)$  和  $p_2(t)$  是什么函数无关。

➤ 理想条件下, 虽然 **E 矩阵的各元素值会趋于无穷大**, **预测的终端误差会随着  $t_{go}$  趋于零而消失**, 因此在理论上不会由于  $t_{go}$  趋于零导致  $c_1$  和  $c_2$  的变大 (理论上, 该系数**数不变化**)。

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/t_{go} & -6/t_{go}^2 \\ -6/t_{go}^2 & 12/t_{go}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

同理, 可得  $y$  轴和  $z$  轴的推力加速度为:

$$a_{p_y}(t) = c_3 + c_4(t_f - t) - g_y(t)$$

$$a_{p_z}(t) = c_5 + c_6(t_f - t) - g_z(t)$$

其中:

$$\begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/t_{go} & -6/t_{go}^2 \\ -6/t_{go}^2 & 12/t_{go}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_f - \dot{y}_0 \\ y_f - (y_0 + \dot{y}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/t_{go} & -6/t_{go}^2 \\ -6/t_{go}^2 & 12/t_{go}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_f - \dot{z}_0 \\ z_f - (z_0 + \dot{z}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

## 显式制导在线应用 (1): 参数更新策略

196

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/t_{go} & -6/t_{go}^2 \\ -6/t_{go}^2 & 12/t_{go}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

如果导航系统和控制系统能够理想地工作, 那么  $c_1$  和  $c_2$  将不会变化:

首先算出的  $c_1$  和  $c_2$  值是原问题的唯一解。如果**当前位置  $x_0$  和速度  $\dot{x}_0$  是准确的, 并且  $g_x(t)$  也是准确的**, 并且飞行控制系统能够**精确地产生  $a_{p_x}(t)$** , 那么在之后的时间  $c_1$  和  $c_2$  就不变。

否则, 需要对  $c_1$  和  $c_2$  进行周期性的计算:

例如像在月球登陆时所出现的那种情况 (由于**随着高度的降低而使得陆雷达的数据得到改善**), 则应该以得到改善的雷达数据, 对  $c_1$  和  $c_2$  进行周期性计算。

## 显式制导在线应用 (2): E 矩阵分析

198

➤ 在实际中, 由于**导航噪声、干扰等**的存在, 预测的终端误差不会随着  $t_{go}$  趋于零而消失,  $c_1$  和  $c_2$  就要不断增大来产生一个**非常大的加速度校正终端误差**。

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/t_{go} & -6/t_{go}^2 \\ -6/t_{go}^2 & 12/t_{go}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

➤ 对于 **E 矩阵** 和  $c_1$ 、 $c_2$  这种不理想的性质, 在动力飞行的最后几秒钟内, 简单地采取**不对 E 矩阵和  $c_1$ 、 $c_2$  重复计算**的策略。

□ 显式制导(explicit guidance)

基于实时状态量信息，采用当前状态与目标点状态直接地生成制导指令（特定参数化），使预测的轨迹（由制导指令确定）满足两点边值条件（当前与目标点）。

□ 显式制导

$$a_{px}(t) = \ddot{x}(t) - g_x(t) = c_1 + c_2(t_f - t) - g_x(t)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/t_{go} & -6/t_{go}^2 \\ -6/t_{go}^2 & 12/t_{go}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 \\ x_f - (x_0 + \dot{x}_0 t_{go}) \end{bmatrix}$$

□ 思考：下面制导方法是否属于显式制导？

$a_p(t) = c_1(x_f - x(t)) + c_2(\dot{x}_f - \dot{x}(t))$  其中， $c_1$ 与 $c_2$ 是由标称轨迹确定（摄动制导）。

例题1：月球下降多项式制导（2）

需要满足的方程变为三个：

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t_f) &= \ddot{x}_f \\ \dot{x}_f - \dot{x}_0 &= \int_{t_0}^{t_f} \ddot{x}(t) dt \\ x_f - x_0 - \dot{x}(t_0)t_{go} &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t \ddot{x}(s) ds \right] dt \end{aligned}$$

将  $\ddot{x}(t)$  的自由度限定为三个：

$$\ddot{x}(t) = c_0 + c_1(t_f - t) + c_2(t_f - t)^2$$

➤ 为满足终端加速度方程： $c_0 = \ddot{x}_f$

➤ 为满足终端位置和速度方程，需要计算： $c_1$  和  $c_2$

例题1：月球下降多项式制导（4）

求解得到  $E$  矩阵：

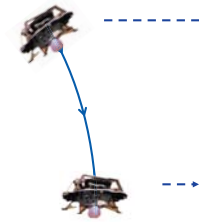
$$E = \begin{bmatrix} -6/t_{go}^2 & 24/t_{go}^3 \\ 12/t_{go}^3 & -36/t_{go}^4 \end{bmatrix}$$

表示为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 - \ddot{x}_f t_{go} \\ x_f - x_0 - \dot{x}_0 t_{go} - \frac{1}{2} \ddot{x}_f t_{go}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24(x_f - x_0)/t_{go}^3 - 6(\dot{x}_f + 3\dot{x}_0)/t_{go}^2 - 6\ddot{x}_f/t_{go} \\ -36(x_f - x_0)/t_{go}^4 + 12(\dot{x}_f + 2\dot{x}_0)/t_{go}^3 + 6\ddot{x}_f/t_{go}^2 \end{bmatrix}$$

例题1：月球下降多项式制导（1）

□ 在月球下降制导任务中，除了终端位置和速度，对终端加速度也有要求：



当前时刻  $t_0$  的位置和速度已知： $x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$

以总的加速度为控制量： $\ddot{x}(t)$

终端  $t_f$  时刻，到达目标位置和速度： $x(t_f) = x_f \quad \dot{x}(t_f) = \dot{x}_f$   
 终端  $t_f$  时刻，加速度需要满足给定值： $\ddot{x}(t_f) = \ddot{x}_f$

➤ 例如，为满足垂直着陆（ $\varphi_c = 90^\circ$ ），需要x轴的加速度满足：

$$\ddot{x}_f = \frac{F_{pc}}{m} \cos \varphi_c \cos \psi_c = 0$$

问题：如何参数化控制量（几个约束方程）？

例题1：月球下降多项式制导（3）

对  $\ddot{x}(t)$  进行积分得到：

$$\begin{aligned} \dot{x}_f - \dot{x}_0 &= \int_{t_0}^{t_f} \ddot{x}(t) dt = c_0 t_{go} + \frac{1}{2} c_1 t_{go}^2 + \frac{1}{3} c_2 t_{go}^3 \\ x_f - x_0 - \dot{x}_0 t_{go} &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t \ddot{x}(s) ds \right] dt = \frac{1}{2} c_0 t_{go}^2 + \frac{1}{6} c_1 t_{go}^3 + \frac{1}{12} c_2 t_{go}^4 \end{aligned}$$

表示为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f - \dot{x}_0 - \ddot{x}_f t_{go} \\ x_f - x_0 - \dot{x}_0 t_{go} - \frac{1}{2} \ddot{x}_f t_{go}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} t_{go}^2 & \frac{1}{3} t_{go}^3 \\ \frac{1}{6} t_{go}^3 & \frac{1}{12} t_{go}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

例题1：月球下降多项式制导（5）

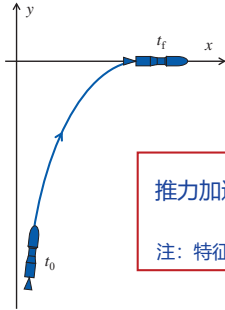
最终得到推力加速度指令为：

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= c_0 + c_1(t_f - t) + c_2(t_f - t)^2 \\ &= \ddot{x}_f + \\ &\quad + 24(x_f - x_0)/t_{go}^2 - 6(\dot{x}_f + 3\dot{x}_0)/t_{go} - 6\ddot{x}_f \\ &\quad - 36(x_f - x_0)/t_{go}^2 + 12(\dot{x}_f + 2\dot{x}_0)/t_{go} + 6\ddot{x}_f \end{aligned}$$

上式化简得到：

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_f + 6(\dot{x}_f + \dot{x}_0)/t_{go} - 12(x_f - x_0)/t_{go}^2$$

□ 火箭推力大小不可调节，要求终端y轴方向到达目标位置和速度：



1. 当前时刻  $t_0$  的位置和速度已知：  $y(t_0) = y_0$   $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$
2. 终端时刻  $t_f$  到达目标位置和速度：  $y(t_f) = y_f$   $\dot{y}(t_f) = \dot{y}_f$
3. 动力学方程：  $\ddot{y}(t) = a_p(t) \sin \varphi(t) + g_y(t)$

推力加速度幅值：  $a_p(t) = \frac{F_p}{m(t)} = \frac{\dot{m}u_e}{m_0 - \dot{m}(t-t_0)} = \frac{u_e}{\tau - (t-t_0)}$  ■ 是时间的函数 ■ 不可调节

注：特征量  $\tau = m_0 / \dot{m}$  和排气速度  $u_e$  均是常值，由火箭自身参数决定。

4. 控制量为姿态角：  $\varphi(t)$

(2) 制导参数的计算

对  $\ddot{y}(t)$  进行积分得到：

$$\dot{y}_f - \dot{y}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \ddot{y}(t) dt = c_1 \int_{t_0}^{t_f} a_p(t) dt + c_2 \int_{t_0}^{t_f} a_p(t)(t-t_0) dt$$

$$y_f - y_0 - \dot{y}_0 t_{go} = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t \ddot{y}(s) ds \right] dt = c_1 \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t a_p(s) ds \right] dt + c_2 \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t a_p(s)(s-t_0) ds \right] dt$$

表示为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_f - \dot{y}_0 \\ y_f - y_0 - \dot{y}_0 t_{go} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$f_{11} = \int_{t_0}^{t_f} a_p(t) dt = -u_e \ln(1 - t_{go} / \tau) \quad f_{12} = \int_{t_0}^{t_f} a_p(t)(t-t_0) dt = f_{11}\tau - u_e t_{go}$$

$$f_{21} = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t a_p(s) ds \right] dt = -f_{12} + f_{11} t_{go} \quad f_{22} = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t a_p(s)(t-s) ds \right] dt = f_{21}\tau - \frac{1}{2} u_e t_{go}^2$$

目 录

1. 大气层外制导的两点边值问题
2. 显式制导
3. 最优显式制导

(1) 控制量的参数化设计

$$\ddot{y}(t) = a_p(t) \sin \varphi(t) + g_y(t)$$

推力加速度幅值已知但不可调节      控制量      重力加速度时变

问题：如何参数化控制量？

① 时间最短的参数化设计：  $\tan \varphi(t) = c_1 + c_2(t-t_0)$

则：  $\ddot{y}(t) = a_p(t) \sin \left\{ \arctan [c_1 + c_2(t-t_0)] \right\} + g_y(t)$  ← 无法解析积分

② 工程化的参数化设计：  $\sin \varphi(t) = c_1 + c_2(t-t_0) - g_y(t) / a_p(t)$

则：  $\ddot{y}(t) = c_1 a_p(t) + c_2 a_p(t)(t-t_0) = c_1 \frac{u_e}{\tau - (t-t_0)} + c_2 \frac{u_e}{\tau - (t-t_0)}(t-t_0)$

(2) 制导参数的计算

进一步：

$$f_{11} = -u_e \ln(1 - t_{go} / \tau)$$

$$f_{12} = -u_e \ln(1 - t_{go} / \tau) \tau - u_e t_{go}$$

$$f_{21} = u_e \ln(1 - t_{go} / \tau) (\tau - t_{go}) + u_e t_{go}$$

$$f_{22} = u_e \ln(1 - t_{go} / \tau) (\tau - t_{go}) \tau + u_e t_{go} \tau - \frac{1}{2} u_e t_{go}^2$$

则  $c_1$  和  $c_2$  的解为：

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_f - \dot{y}_0 \\ y_f - y_0 - \dot{y}_0 t_{go} \end{bmatrix}$$

$$e_{11} = f_{22} / \Delta, \quad e_{12} = -f_{12} / \Delta$$

$$e_{21} = -f_{21} / \Delta, \quad e_{22} = f_{11} / \Delta$$

$$\Delta = f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}$$

$p_1(t)$  和  $p_2(t)$  的选取

□ 回顾  $p_1(t)$  和  $p_2(t)$  选取的限制：

$$\ddot{x}(t) = c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f$$

➢  $P_1$ 、 $P_2$  是时间的线性无关函数，即  $F$  可逆

➢  $P_1$ 、 $P_2$  具有一次和二次积分，保证  $E$  矩阵元素是  $t_0$  和  $t_f$  的代数函数

问题：如何既能使积分是简单的代数函数，又能使  $\ddot{x}(t)$  是最优形式？

将  $p_1(t)$  和  $p_2(t)$  表示为  $(t_f - t)$  的多项式函数

$$p_1(t) = a_0 + a_1(t_f - t) + a_2(t_f - t)^2 + \dots + a_n(t_f - t)^n$$

$$p_2(t) = p_1(t)(t_f - t)$$

➢ 注意：只要至少一个  $a_i$  不为零，就满足  $P_1$ 、 $P_2$  是线性无关的；此外， $P_1$ 、 $P_2$  可积，满足选取限制

$$p_1(t) = a_0 + a_1(t_f - t) + a_2(t_f - t)^2 + \dots + a_n(t_f - t)^n$$

$$p_2(t) = p_1(t)(t_f - t)$$

在 $P_1$ 、 $P_2$ 的一次和二次积分中，有

$$\int_0^{t_f} (t_f - t)^n dt = t_{go}^{(n+1)} / (n+1)$$

$$\int_0^{t_f} \left[ \int_0^t (t_f - s)^n ds \right] dt = t_{go}^{(n+2)} / (n+2)$$

则矩阵F中的元素可表示为：

$$f_{11} = a_0 t_{go} + a_1 t_{go}^2 / 2 + \dots + a_n t_{go}^{(n+1)} / (n+1)$$

$$f_{12} = a_0 t_{go}^2 / 2 + a_1 t_{go}^3 / 3 + \dots + a_n t_{go}^{(n+2)} / (n+2)$$

$$f_{21} = a_0 t_{go}^2 / 2 + a_1 t_{go}^3 / 3 + \dots + a_n t_{go}^{(n+2)} / (n+2)$$

$$f_{22} = a_0 t_{go}^3 / 3 + a_1 t_{go}^4 / 4 + \dots + a_n t_{go}^{(n+3)} / (n+3)$$



制导与控制原理

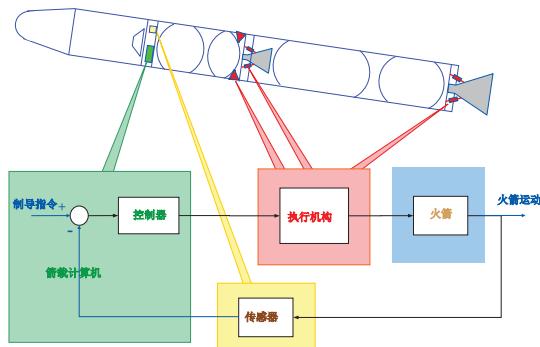
火箭飞行稳定与控制

(1. 火箭姿态稳定性分析)

张冉  
自主系统与飞行控制实验室  
北京航空航天大学宇航学院

2023 春

飞行稳定与控制的基本组成



$$\ddot{x}(t) = c_1 \left[ a_0 + a_1(t_f - t) + \dots + a_n(t_f - t)^n \right]$$

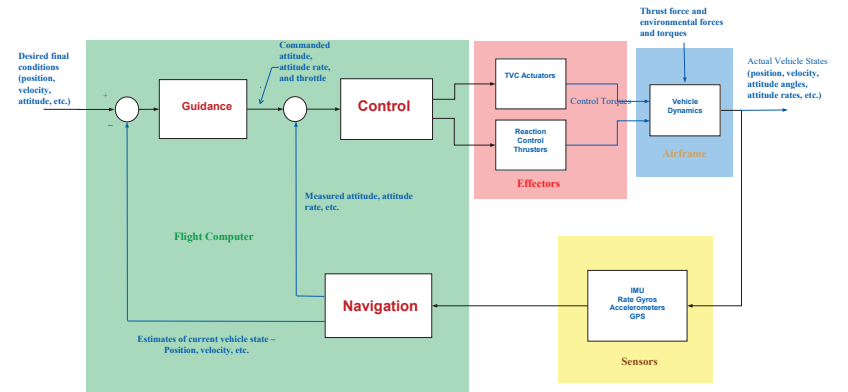
$$+ c_2 \left[ a_0(t_f - t) + \dots + a_n(t_f - t)^{n+1} \right]$$

由于任何时间的解析函数都可以表示为 $t_f$ 的泰勒展开式，即可以表示为 $(t_f - t)$ 的多项式函数，因此该形式包含了 $\ddot{x}(t)$ 的最优形式。

问题：如何选取最优的 $a_i$ ？

- 遍历 $a_i$ ，直到找到使燃料消耗最小的 $a_i$ 为止，由于效率低下，一般在地面上计算
- 在大量飞行案例中发现， $a_i$ 的选择对不同制导任务不敏感，若 $a_i^*$ 对于一个制导任务最优，对于另一个差别很大的任务可能仍然是一个好的选择
- 此外，当选择不同的 $P_1$ 、 $P_2$ 形式时，最终的燃料消耗可能相差并不大

制导导航与控制 (GNC)



目录

1. 火箭姿态控制
2. 稳定性
3. 火箭的线性化模型
4. 火箭的稳定性分析

1. 火箭姿态控制
2. 稳定性
3. 火箭的线性化模型
4. 火箭的稳定性分析

控制对象 (火箭) 动力学特征

219

忽略姿态运动惯性积，运载火箭刚体质心（速度坐标系）与绕质心（本体系）动力学方程为：

$$\begin{cases} m\dot{v} = F_{x_a} \\ m v \dot{\theta} \cos \sigma = F_{y_a} \\ -m v \dot{\sigma} = F_{z_a} \\ J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = M_{x_p} \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x = M_{y_p} \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = M_{z_p} \end{cases}$$

其中，火箭所受的力包括引力、气动力、推力、控制力、摆动惯性力和干扰力；力矩包括气动力矩、推力矩、控制力矩、摆动惯性力矩和干扰力矩。

气动力和气动力矩 (1)

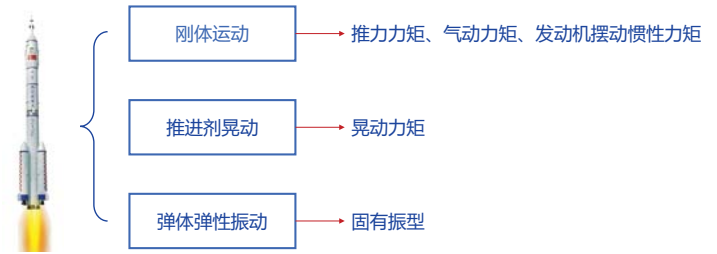
221

气动力在速度坐标系的分量分别称为阻力、升力、侧向力：

$$\begin{aligned} F_{Ax_a} &= -(C_x + \Delta C_x) q S_M \\ F_{Ay_a} &= (C_y^\alpha + \Delta C_y^\alpha) q S_M (\alpha + \alpha_w) \\ F_{Az_a} &= -(C_z^\beta + \Delta C_z^\beta) q S_M (\beta + \beta_w) \end{aligned}$$

- 与马赫数、攻角、侧滑角、高度有关
- $C_x$  为气动计算阻力系数， $\Delta C_x$  为阻力系数偏差；
  - $C_y^\alpha$  为法向力系数对攻角的偏导， $\Delta C_y^\alpha$  为法向力系数导数偏差；
  - $C_z^\beta$  为侧向力系数对偏航角的偏导， $\Delta C_z^\beta$  为侧向力系数导数偏差；
- 不确定性**
- $\alpha$  为惯性攻角， $\alpha_w$  为风攻角； $\beta$  为侧滑角， $\beta_w$  为风侧滑角；
  - $q = \frac{1}{2} \rho V_w^2$  为动压，其中  $\rho$  为大气密度
  - $V_w = V_g + W$  为相对于气流的速度， $V_g$  为地速， $W$  为风速

火箭绕质心运动是运动的复合，主要包括刚体运动、推进剂晃动、弹体弹性振动。相应地，动力学方程包括刚体动力学方程、晃动方程、弹性振动方程



引力

220

采用平面大地模型，引力在速度坐标系的投影为：

$$F_{g_a} = m R_{al} [0 \quad -g \quad 0]^T$$

其中，坐标转移矩阵：

$$R_{al} = \begin{bmatrix} \cos(\sigma) \cos(\theta) & \cos(\sigma) \sin(\theta) & -\sin(\sigma) \\ \cos(\theta) \sin(\nu) \sin(\sigma) - \cos(\nu) \sin(\theta) & \cos(\nu) \cos(\theta) + \sin(\nu) \sin(\sigma) \sin(\theta) & \cos(\sigma) \sin(\nu) \\ \sin(\nu) \sin(\theta) + \cos(\nu) \cos(\theta) \sin(\sigma) & \cos(\nu) \sin(\sigma) \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\nu) & \cos(\nu) \cos(\sigma) \end{bmatrix}$$

则，引力在速度坐标系的分量形式为：

$$\begin{aligned} F_{g_{x_a}} &= -mg \sin \theta \cos \sigma \\ F_{g_{y_a}} &= -mg \cos \theta \\ F_{g_{z_a}} &= -mg \sin \theta \sin \sigma \end{aligned}$$

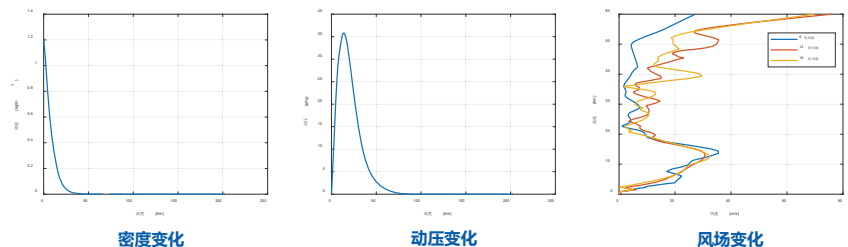
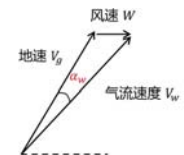
引力不产生力矩：

$$M_{g_{x_a}} = M_{g_{y_a}} = M_{g_{z_a}} = 0$$

气动力和气动力矩 (2)

222

$$\begin{aligned} F_{Ax_a} &= -(C_x + \Delta C_x) q S_M \\ F_{Ay_a} &= (C_y^\alpha + \Delta C_y^\alpha) q S_M (\alpha + \alpha_w) \\ F_{Az_a} &= -(C_z^\beta + \Delta C_z^\beta) q S_M (\beta + \beta_w) \end{aligned}$$



□ 由于质心和压心不重合, 气动力会产生气动力矩, 包括稳定力矩和阻尼力矩。

• 气动力合力作用到压心上, 产生稳定力矩:

$$\begin{cases} M_{A_x} = 0 \\ M_{A_y} = -(m_y^\beta + \Delta m_y^\beta) q S_M l_k (\beta + \beta_w) \\ M_{A_z} = -(m_z^\alpha + \Delta m_z^\alpha) q S_M l_k (\alpha + \alpha_w) \end{cases}$$

- $M_A$  为静态气动力矩,
- $m_y^\beta$  为偏航力矩系数导数,  $m_z^\alpha$  为俯仰力矩系数导数

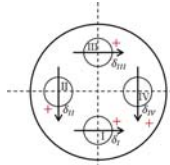
• 当火箭转动时, 存在大气的阻尼, 存在阻止转动的阻尼力矩, 与转动方向相反:

$$\begin{cases} M_{d_x} = -(m_x^{\omega_x} + \Delta m_x^{\omega_x}) q S_M l_k^2 \omega_x / v \\ M_{d_y} = -(m_y^{\omega_y} + \Delta m_y^{\omega_y}) q S_M l_k^2 \omega_y / v \\ M_{d_z} = -(m_z^{\omega_z} + \Delta m_z^{\omega_z}) q S_M l_k^2 \omega_z / v \end{cases}$$

其中,  $M_d$  为气动阻尼力矩, 与角速度有关;  $m_x^{\omega_x}$  为滚转通道气动阻尼系数。

控制力与控制力矩 (1)

□ 控制力是发动机摆角产生的推力分量。以四台单摆发动机控制三个通道为例介绍控制力分配情况。



◆ “十”字构型, 各通道控制相互解耦

- ① I、III发动机控制偏航, 向右为正, 设产生的控制力为  $F_{kz1}$
- ② II、IV发动机控制俯仰, 向下为正, 设产生的控制力为  $F_{kz2}$
- ③ 4台发动机同时控制滚转, 顺时针为正, 设产生控制力为  $F_{kz3}$
- ④ 单台推力为  $p$ , 总推力  $F_p = 4p$

控制力方程为:

$$\begin{cases} F_{kz1} = 2p\delta_\varphi \\ F_{kz2} = -2p\delta_\gamma \\ F_{kz3} = 4p\delta_\psi \end{cases}$$

问题: 如何求得综合摆角  $\delta_\varphi$ 、 $\delta_\gamma$ 、 $\delta_\psi$

控制力与控制力矩 (3)

控制力、力矩在本体系投影为:

$$\begin{cases} F_{C_{x_a}} = 2p \cos \delta_\varphi + 2p \cos \delta_\gamma - F_p \\ F_{C_{y_a}} = 2p \sin \delta_\varphi \\ F_{C_{z_a}} = -2p \sin \delta_\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} M_{C_{x_a}} = -4p z_c \sin \delta_\psi \\ M_{C_{y_a}} = F_{C_{z_a}} (x_c - x_g) = -2p (x_c - x_g) \sin \delta_\psi \\ M_{C_{z_a}} = -F_{C_{y_a}} (x_c - x_g) = -2p (x_c - x_g) \sin \delta_\psi \end{cases}$$

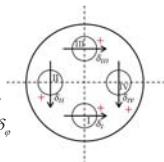
- $z_c$  为发动机作用点至火箭纵轴的距离,
- $x_c$  为理论尖端到发动机作用点的距离

控制力在速度系的投影为:

$$F_{C_a} = R_{ab} F_{C_b}$$

各分量形式为:

$$\begin{aligned} F_{C_{x_a}} &= F_{C_{x_b}} \cos \beta \cos \alpha - F_{C_{y_b}} \sin \alpha + F_{C_{z_b}} \sin \beta \\ F_{C_{y_a}} &= F_{C_{x_b}} \cos \beta \sin \alpha + F_{C_{y_b}} \cos \alpha \\ F_{C_{z_a}} &= -F_{C_{x_b}} \sin \beta + F_{C_{z_b}} \cos \beta \end{aligned}$$



推力方向沿体轴, 推力大小为:

$$F_p = \dot{m} u_e - S_e p_H$$

- $\dot{m} u_e$  为燃料燃烧所能产生的推力,  $u_e$  为发动机的有效喷气速度
- $S_e p_H$  为发动机所处环境压力带来的推力偏差,  $S_e$  为发动机尾喷面积,  $p_H$  为环境压强

推力在本体系的投影为:

$$\begin{aligned} F_{P_{x_b}} &= F_p \\ F_{P_{y_b}} &= F_{P_{z_b}} = 0 \end{aligned}$$

推力在在速度坐标系的投影为:

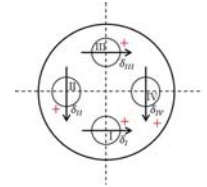
$$\begin{aligned} F_{P_{x_a}} &= F_p \cos \alpha \cos \beta \\ F_{P_{y_a}} &= F_p \cos \beta \sin \alpha \\ F_{P_{z_a}} &= -F_p \sin \beta \end{aligned}$$

由于推力过质心, 不产生力矩。

控制力与控制力矩 (2)

定义物理舵分配方程为:

$$\begin{cases} \delta_\varphi = \frac{1}{2}(\delta_{II} + \delta_{IV}) \\ \delta_\gamma = \frac{1}{2}(\delta_I + \delta_{III}) \\ \delta_\psi = \frac{1}{4}(-\delta_I - \delta_{II} + \delta_{III} + \delta_{IV}) \end{cases}$$



令 (俯仰与偏航贡献相同):

$$\delta_{III} - \delta_I = \delta_{IV} - \delta_{II}$$

可得:

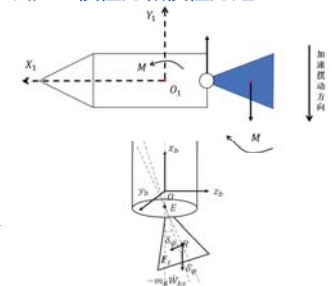
$$\begin{cases} \delta_I = \delta_\gamma - \delta_\psi \\ \delta_{II} = \delta_\varphi - \delta_\psi \\ \delta_{III} = \delta_\varphi + \delta_\psi \\ \delta_{IV} = \delta_\gamma + \delta_\psi \end{cases}$$

✓ 四个物理舵摆角为在其对应俯仰偏航综合摆角的基础上, 叠加上滚转通道 (俯仰与偏航的差动) 的综合摆角。

发动机惯性力与惯性力矩

□ 发动机具有质量和转动惯量, 在摆动发动机时, 会产生惯性力和惯性力矩

$$\begin{aligned} F_{I_{x_a}} &= 0 \\ F_{I_{y_a}} &= 2m_R l_R \ddot{\delta}_\varphi \\ F_{I_{z_a}} &= -2m_R l_R \ddot{\delta}_\psi \\ M_{I_{x_b}} &= -4J_R \ddot{\delta}_\gamma - 4m_R l_R z_c \ddot{\delta}_\gamma \\ M_{I_{y_b}} &= -2J_R \ddot{\delta}_\psi - 2m_R l_R (x_c - x_g) \ddot{\delta}_\psi - 2m_R \dot{W}_{x_1} l_R \delta_\psi \\ M_{I_{z_b}} &= -2J_R \ddot{\delta}_\varphi - 2m_R l_R (x_c - x_g) \ddot{\delta}_\varphi - 2m_R \dot{W}_{x_1} l_R \delta_\varphi \end{aligned}$$



其中  $F_{I_x}$ 、 $M_{I_x}$  分别为附加惯性力、力矩;  $m_R$  为单个摆喷质量;  $l_R$  为摆喷质心至铰接点的距离;  $z_c$  为摆喷质心至纵轴的距离;  $x_c$  为发动机作用点至理论尖端的距离;  $x_g$  为质心距头部距离。



以气动力为例

$$F_{Ax} = -(C_x + \Delta C_x) q S_M$$

$$F_{Ay} = (C_y^\alpha + \Delta C_y^\alpha) q S_M (\alpha + \alpha_w)$$

$$F_{Az} = -(C_z^\beta + \Delta C_z^\beta) q S_M (\beta + \beta_w)$$

将  $\Delta C, \alpha_w, \beta_w$  这些不确定性因素都提取出来, 用干扰力  $F_{x,y,z}$  等效, 并令  $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$  表示飞行过程中所受到的干扰力、力矩。

口 综合力 (引力、推力、气动力、控制力、惯性力、干扰力) 和力矩 (稳定、阻尼、控制、惯性、干扰), 火箭刚体运动方程如下:

$$F_{x_0} = F_{g_{x_0}} + F_{P_{x_0}} + F_{A_{x_0}} + F_x$$

$$F_{y_0} = F_{g_{y_0}} + F_{P_{y_0}} + F_{A_{y_0}} + F_{C_{y_0}} + F_{I_{y_0}} + F_y$$

$$F_{z_0} = F_{g_{z_0}} + F_{P_{z_0}} + F_{A_{z_0}} + F_{C_{z_0}} + F_{I_{z_0}} + F_z$$

$$M_{x_0} = M_{A_{x_0}} + M_{d_{x_0}} + M_{C_{x_0}} + M_{I_{x_0}} + M_x$$

$$M_{y_0} = M_{A_{y_0}} + M_{d_{y_0}} + M_{C_{y_0}} + M_{I_{y_0}} + M_y$$

$$M_{z_0} = M_{A_{z_0}} + M_{d_{z_0}} + M_{C_{z_0}} + M_{I_{z_0}} + M_z$$

弹性振动动力学模型

口 战略导弹和运载火箭通常具备较高的长细比以及较小的结构质量, 结构刚度小, 会在外力的作用下产生弹性振动, 姿态控制时必须考虑弹性振动的影响。

✓ 弹性振动产生的横向位移, 是由一系列弹性振型产生位移的叠加

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) W_i(X) \quad i=1,2,\dots,n$$

①  $W_i(X)$  表示任意瞬时弹体纵轴各点的相对横向位移的关系, 称为弹体第*i*阶固有振型函数

②  $q_i(t)$  表示第*i*次振型在*t*时刻振动的广义坐标, 由二阶常微分方程确定:

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = D_{i1} \Delta \dot{\phi} + D_{i2} \Delta \alpha + D_{i3} \delta_\phi + D_{i3}^* \delta_\phi^* + \sum_{p=1}^{n_p} D_{ip}^* \Delta \dot{y}_p + \sum_{p=1}^{n_p} D_{ip} \Delta y_p + Q_{i1}$$



弹性振型

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = D_{i1} \Delta \dot{\phi} + D_{i2} \Delta \alpha + D_{i3} \delta_\phi + D_{i3}^* \delta_\phi^* + \sum_{p=1}^{n_p} D_{ip}^* \Delta \dot{y}_p + \sum_{p=1}^{n_p} D_{ip} \Delta y_p + Q_{i1}$$

弹性振动的频率大约在2~15Hz      干扰力对应的广义力

其中:

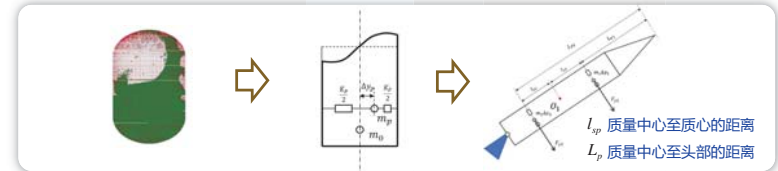
$$D_{i1} = -\frac{57.3qS_M}{M_i V} \left[ \int_0^{l_k} C_y^\alpha(X) (X_z - X) W_i(X) dX \right], \quad D_{i2} = \frac{57.3qS_M}{M_i} \left[ \int_0^{l_k} C_y^\alpha(X) W_i(X) dX \right]$$

$$D_{i3} = \frac{1}{M_i} [P W_i(X_R) + 9m_R \dot{W}_{x_i} l_R W_i'(X_R)], \quad D_{i3}^* = \frac{9}{M_i} [m_R l_R W_i(X_R) + J_R W_i'(X_R)]$$

$$D_{ip} = -\frac{1}{M_i} m_p \dot{W}_{x_i} W_i'(X_p), \quad D_{ip}^* = -\frac{m_p}{M_i} W_i(X_p)$$

- $M_i$  广义质量,  $\dot{W}_{x_i}$  为x轴视加速度
- $W_i(X_R)$  在发动机较链处的第*i*阶振型
- $W_i'(X_R)$  在发动机较链处的第*i*阶振型斜率
- $m_R$  单个发动机的质量
- $l_R$  发动机机心离较链的距离
- $J_R$  发动机绕较链的惯量

口 晃动是液体推进剂在贮箱内晃动产生的。这种晃动是由于火箭飞行时, 贮箱晃动引起液体振荡造成的。通常, 用弹簧振子来代替复杂的液体流动:



• 弹体推进剂晃动导致美国“丘比特”导弹试验失败。由于晃动没有充分抑制, 引起晃动激励力的作用而难以稳定控制。

$$F_{xx} = 0, \quad F_{yy} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p \Delta \ddot{y}_p, \quad F_{zz} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p \Delta \ddot{z}_p$$

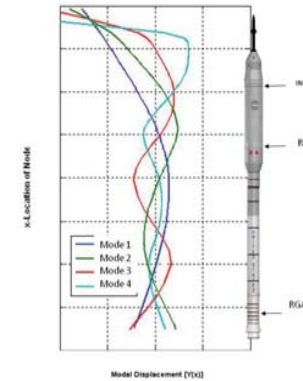
$$\Delta \ddot{y}_p + 2\zeta_p \Omega_p \Delta \dot{y}_p + \Omega_p^2 \Delta y_p = -(\dot{l}_{sp} - L_p) \ddot{\psi} - g \cos \varphi - \dot{V}_y$$

$$\Delta \ddot{z}_p + 2\zeta_p \Omega_p \Delta \dot{z}_p + \Omega_p^2 \Delta z_p = -(\dot{l}_{sp} - L_p) \ddot{\psi} - g \cos \psi - \dot{V}_z$$

$$M_{xy} = l_{sp} F_{xz}, \quad M_{xz} = l_{sp} F_{xy}$$

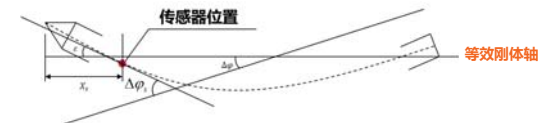
➢  $\Omega_p$  为第*p*个贮箱的晃动圆频率,  $\zeta_p$  为第*p*个贮箱的阻尼比,  $m_p$  为第*p*个贮箱的质量,  $\dot{V}_y, \dot{V}_z$  本体系y,z轴加速度

固有振型函数举例



弹性振动影响速率陀螺的量测

口 弹性变形通过影响速率陀螺的量测影响火箭姿态稳定性



a) 对姿态角量测的影响:

量测角增量满足  $\Delta \phi_s = \Delta \phi + \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  为弹性变形产生的局部俯仰角变化:

$$\varepsilon = -\frac{\partial y(X,t)}{\partial X} \Big|_{x=X_s} = -\sum_{i=1}^n q_i(t) W_i'(X_s)$$

b) 对姿态角速率量测的影响:

对角速度的量测误差与角度量测误差类似, 速率陀螺敏感的角度速度信号误差为:

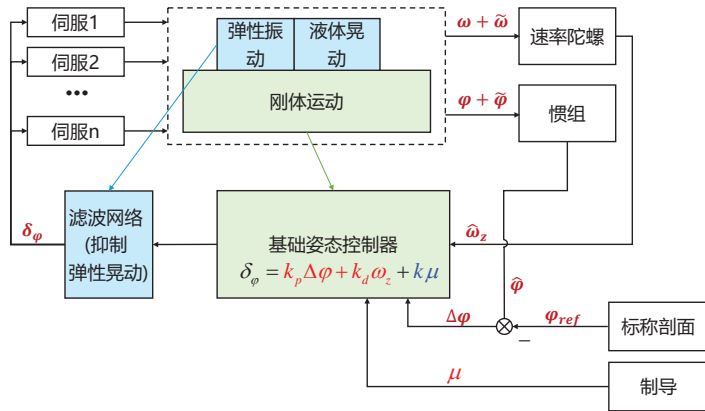
$$\Delta \dot{\phi}_{gs} = \Delta \dot{\phi} - \sum_{i=1}^n W_i'(X_{gs}) \dot{q}_i$$



1. 运载火箭动力学模型复杂、阶次高
2. 特性参数时变
3. 飞行环境复杂且存在干扰与不确定性
4. 结构刚度低、低频特性可能存在耦合（液体晃动、弹性）



火箭姿控控制任务：控制刚性弹体的姿态角



直观理解火箭姿态稳定性

以平面火箭模型为例，火箭转动运动方程为：

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$J\dot{\omega} = F_A \sin \alpha \cdot r_{CP} - F_p \sin \delta_\varphi \cdot r_e$$

>  $r_{CP}$  为质心到压心的距离,  $r_e$  为质心到发动机作用点的距离,  $\omega$  为火箭转动角速度。

令  $\delta_\varphi = 0, \alpha = 0, \omega = 0$ , 则

$$\dot{\varphi} = 0$$

$$J\dot{\omega} = 0$$

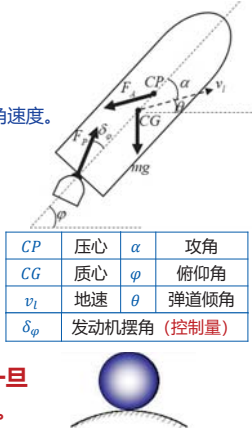
则系统状态量  $\varphi, \omega$  可以保持不变且恒为0。

若此时出现了小的扰动使得  $\alpha \neq 0$ , 并且没有姿态控制：

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$J\dot{\omega} = F_A \sin \alpha \cdot r_{CP}$$

因此,  $\omega$  会逐渐变大,  $\varphi, \alpha = \varphi - \theta_0$  也会变大, 进而  $\dot{\omega}$  会更大。一旦偏离平衡状态, 则会有更加偏离平衡状态的趋势, 系统不稳定。



• 问题：火箭姿态控制的任务是什么？

✓ 控制刚性弹体的姿态角

GNC任务：在干扰作用下沿着预先选定的标准弹道飞行，其偏差应在允许的范围内。

前提条件：不能调节推力大小，主要靠控制弹体的推力方向。

• 因为：弹体的推力方向主要是由刚性弹体的姿态角决定的（弹性振动引起的附加发动机摆角是频率较高的周期振动，对弹道的影响可忽略）。

• 所以：姿态控制系统的任务就是根据制导系统和导航系统提供的信号控制刚性弹体的姿态角。

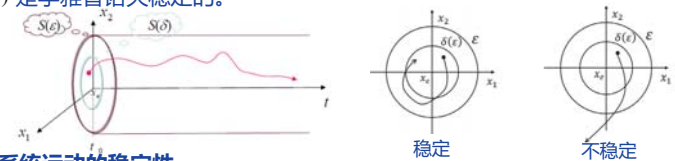
目录

1. 火箭姿态控制
2. 稳定性
3. 火箭的线性化模型
4. 火箭的稳定性分析

稳定性的定义

□ 李雅普诺夫稳定 (Lyapunov stability)

如果对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 使得当  $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$  时, 都有  $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geq 0$ , 那么  $x(t)$  是李雅普诺夫稳定的。



□ 线性系统运动的稳定性

一个线性系统为稳定（即它的所有运动均为稳定）的充分必要条件是：

它的特征多项式的全部零点都位于左半复数平面（与初始值无关）。

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

特征多项式

$$= \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}$$

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

线性时不变系统稳定的充要条件为：

1. 系统特征方程的各项系数均大于0, 即 $a_i > 0, i=0,1,2,\dots,n$ ;
2. 奇数阶或偶数阶的赫尔维茨行列式大于0, 即 $D_{奇} > 0$  或  $D_{偶} > 0$

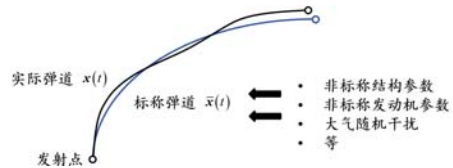
其中, 赫尔维茨行列式为:

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

### 受扰运动的稳定性

#### 受扰运动的稳定性

系统未受扰动的解为 $\bar{X}(t)$ , 受扰动的解为 $X(t)$ , 扰动偏差函数 $\Delta X(t)$ 为 $\Delta X(t) = X(t) - \bar{X}(t)$   
 如果对于任意正数  $\varepsilon$ , 可以找到另一个正数 $\eta(\varepsilon)$ , 使得对于所有受干扰的运动, 当其初始条件满足 $|\Delta x(t_0)| \leq \eta(\varepsilon)$ , 满足不等式 $|\Delta x(t)| < \varepsilon$ , 受扰动的运动是稳定的。



#### 受扰运动的线性稳定性

对于非线性、时变的六自由度火箭运动方程, 难以证明李雅普诺夫意义下的稳定性。由于火箭在标称弹道附近飞行, 可沿标称弹道线性展开, 将问题转化成线性时变系统的稳定性分析。

## 目录

1. 火箭姿态控制
2. 稳定性
3. 火箭的线性化模型
4. 火箭的稳定性分析

1、给定一个二阶系统:

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0, \quad (a_0 > 0)$$

其奇数阶赫尔维茨行列式为:

$$D_1 = a_1$$

则二阶系统稳定的充要条件为:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$$

2、给定一个三阶系统:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0, \quad (a_0 > 0)$$

则三阶系统稳定的充要条件为:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

### 系数“冻结”法

采用系数“冻结”法分析线性时变系统的稳定性

#### 系数冻结法

有干扰作用的飞行器姿态运动方程的系数是时变的, 但是绕质心运动的暂态过程比线性时变系统的系数变化快, 可以认为在某一短时间内, 方程系数不变化, 而将姿态运动方程视为常微分方程组。

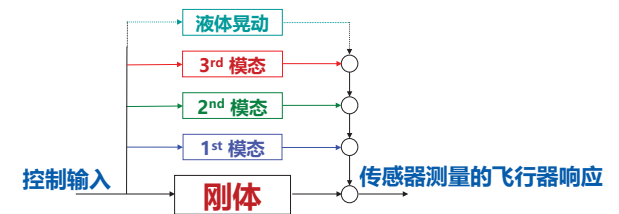
“冻结”系数的时间点可根据具有特征性的动态飞行段选取, 一般可选在

- ① 最大动压飞行段 (此段的特点是飞行器的静不稳定性最大)
- ② 弹性振动频率和刚体运动频率最靠近的飞行段
- ③ 弹性振动和箱内推进剂晃动频率最靠近的飞行段
- ④ 发射、分离、发动机或姿控发动机状态转换的特征点

系数“冻结”法将火箭姿态运动的稳定性简化为线性时不变系统的稳定性

### 刚体姿态运动

- 姿态控制系统的任务是控制刚性弹体的姿态角
- 刚性姿态运动是火箭姿态运动的基础, 弹性振动和液体晃动可以看成是相对于刚性弹体的运动
- 为了实现火箭姿态运动的稳定与控制, 先从刚体姿态运动的稳定与控制开始



非线性运动方程:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= F_{g_{x_a}} + F_{P_{x_a}} + F_{A_{x_a}} + F_x \\ mv\dot{\theta}\cos\sigma &= F_{g_{y_a}} + F_{P_{y_a}} + F_{A_{y_a}} + F_{C_{y_a}} + F_{I_{y_a}} + F_y \\ -mv\dot{\sigma} &= F_{g_{z_a}} + F_{P_{z_a}} + F_{A_{z_a}} + F_{C_{z_a}} + F_{I_{z_a}} + F_z \\ J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z &= M_{A_{x_b}} + M_{d_{x_b}} + M_{C_{x_b}} + M_{I_{x_b}} + M_x \\ J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x &= M_{A_{y_b}} + M_{d_{y_b}} + M_{C_{y_b}} + M_{I_{y_b}} + M_y \\ J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y &= M_{A_{z_b}} + M_{d_{z_b}} + M_{C_{z_b}} + M_{I_{z_b}} + M_z \end{aligned}$$

线性化假设:  $\delta_\varphi$ 、 $\delta_\psi$ 、 $\delta_\gamma$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\Delta\varphi = \Delta\alpha + \Delta\theta$  及轨迹与标称偏差量为小量

### 三通道解耦

假设轨迹与标称的偏差为小量, 则飞行器运动可以分解成三个互相独立的角平面运动, 即俯仰、偏航、滚转, 下面以俯仰通道为例, 线性化姿态动力学方程:

□ 俯仰通道

$$\begin{cases} mv\dot{\theta}\cos\sigma = -mg\cos\theta + F_p\cos\beta\sin\alpha + C_y^a qS_M\alpha + \frac{F_p}{2}\delta_\varphi + F_y \\ J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = -m_z^a qS_M l_k \alpha - \frac{m_z^a qS_M l_k^2}{v}\omega_z - \frac{F_p}{2}(x_c - x_g)\delta_\varphi + M_z \end{cases}$$

□ 偏航通道

$$\begin{cases} -mv\dot{\sigma} = -mg\sin\theta\sin\sigma - F_p\sin\beta - C_z^a qS_M\beta - \frac{F_p}{2}\delta_\psi + F_z \\ J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = -m_y^a qS_M l_k \beta - \frac{m_y^a qS_M l_k^2}{v}\omega_y - \frac{F_p}{2}(x_c - x_g)\delta_\psi + M_y \end{cases}$$

□ 滚转通道

$$J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = -\frac{m_x^a qS_M l_k^2}{v}\omega_x - F_p z_c \delta_\gamma + M_x$$

### 俯仰通道线性化 (1)

俯仰通道方程:

$$\begin{aligned} mv\dot{\theta}\cos\sigma &= -mg\cos\theta + F_p\cos\beta\sin\alpha + C_y^a qS_M\alpha + \frac{F_p}{2}\delta_\varphi + F_y \\ J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y &= -m_z^a qS_M l_k \alpha - \frac{m_z^a qS_M l_k^2}{v}\omega_z - \frac{F_p}{2}(x_c - x_g)\delta_\varphi + M_z \end{aligned}$$

俯仰通道标称弹道方程:

$$\begin{aligned} mv\dot{\theta}_0\cos 0 &= -mg\cos\theta_0 + F_p\cos 0\sin\alpha_0 + C_y^a qS_M\alpha_0 + \frac{F_p}{2}\delta_{\varphi 0} \\ J_z\dot{\omega}_0 + (J_y - J_x)(0 - \dot{\omega}_0 \cdot 0)(0 + \dot{\omega}_0 \cdot 0) &= -m_z^a qS_M l_k \alpha_0 - \frac{m_z^a qS_M l_k^2}{v}\dot{\omega}_0 - \frac{F_p}{2}(x_c - x_g)\delta_{\varphi 0} \end{aligned}$$

则俯仰通道扰动方程为:

$$\begin{aligned} mv\Delta\dot{\theta} &= mg\sin\theta_0\Delta\theta + F_p\cos\alpha_0\Delta\alpha + C_y^a qS_M\Delta\alpha + \frac{F_p}{2}\Delta\delta_\varphi + F_y \\ J_z\Delta\dot{\omega} &= -m_z^a qS_M l_k \Delta\alpha - \frac{m_z^a qS_M l_k^2}{v}\Delta\dot{\omega} - \frac{F_p}{2}(x_c - x_g)\Delta\delta_\varphi + M_z \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} mv(\dot{\theta}_0 + \Delta\dot{\theta})\cos\Delta\sigma - mv\dot{\theta}_0\cos 0 &= mv\Delta\dot{\theta} \\ mg\cos(\theta_0 + \Delta\theta) - mg\cos\theta_0 &= mg(\cos\theta_0\cos\Delta\theta - \sin\theta_0\sin\Delta\theta) - mg\cos\theta_0 = -mg\sin\theta_0\Delta\theta \\ F_p\cos\beta\sin\alpha - F_p\cos 0\sin\alpha_0 &= F_p\cos\Delta\beta\sin\alpha - F_p\cos 0\sin\alpha_0 = F_p\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) - F_p\sin\alpha_0 = F_p\cos\alpha_0\Delta\alpha \end{aligned}$$

由控制力和控制力矩表达式:

$$\begin{cases} F_{C_{x_a}} = F_{C_{x_b}}\cos\beta\cos\alpha - F_{C_{y_b}}\sin\alpha + F_{C_{z_b}}\sin\beta \\ F_{C_{y_a}} = F_{C_{x_b}}\cos\beta\sin\alpha + F_{C_{y_b}}\cos\alpha \\ F_{C_{z_a}} = -F_{C_{x_b}}\sin\beta + F_{C_{z_b}}\cos\beta \end{cases} \quad \begin{cases} M_{C_{x_b}} = -4pz_c\sin\delta_r \\ M_{C_{y_b}} = F_{C_{x_b}}(x_c - x_g) = -2p(x_c - x_g)\sin\delta_\psi \\ M_{C_{z_b}} = -F_{C_{y_b}}(x_c - x_g) = -2p(x_c - x_g)\sin\delta_\varphi \end{cases}$$

假设  $\delta_\varphi$ 、 $\delta_\psi$ 、 $\delta_\gamma$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  都为小角度, 则:

$$\begin{cases} F_{C_{x_a}} = F_{C_{x_b}} = 2p\cos\delta_\varphi + 2p\cos\delta_\psi - F_p = 0 \\ F_{C_{y_a}} = F_{C_{y_b}} = 2p\sin\delta_\varphi = \frac{F_p}{2}\delta_\varphi \\ F_{C_{z_a}} = F_{C_{z_b}} = -2p\sin\delta_\psi = -\frac{F_p}{2}\delta_\psi \end{cases} \quad \begin{cases} M_{C_{x_b}} = -F_p z_c \delta_\gamma \\ M_{C_{y_b}} = -\frac{F_p}{2}(x_c - x_g)\delta_\psi \\ M_{C_{z_b}} = -\frac{F_p}{2}(x_c - x_g)\delta_\varphi \end{cases}$$

### 角速度的简化

令:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \Delta\theta, \quad \alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \quad \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad \sigma = \Delta\sigma, \quad \beta = \Delta\beta, \\ \psi &= \Delta\psi, \quad \gamma = \Delta\gamma, \quad \delta_\varphi = \delta_{\varphi 0} + \Delta\delta_\varphi, \quad \delta_\psi = \Delta\delta_\psi, \quad \delta_\gamma = \Delta\delta_\gamma \end{aligned}$$

其中,  $\theta_0$ 、 $\alpha_0$ 、 $\varphi_0$  为弹道设计时得到的标准弹道参数,  $\alpha_0$  为根据力矩平衡假设由  $\delta_{\varphi 0}$  得到的俯仰舵偏。

则, 角速度可简化为:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} - \dot{\varphi}\sin\psi = \dot{\gamma} - (\dot{\varphi}_0 + \Delta\dot{\varphi})\sin\psi \approx \dot{\gamma} - \dot{\varphi}_0\psi \\ \omega_y &= \dot{\psi}\cos\gamma + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\gamma \approx \dot{\psi} + \dot{\varphi}_0\gamma \\ \omega_z &= \dot{\varphi}\cos\psi\cos\gamma - \psi\sin\gamma \approx \dot{\varphi} \end{aligned}$$

### 俯仰通道线性化 (2)

$$\begin{aligned} mv\Delta\dot{\theta} &= mg\sin\theta_0\Delta\theta + F_p\cos\alpha_0\Delta\alpha + C_y^a qS_M\Delta\alpha + \frac{F_p}{2}\Delta\delta_\varphi + F_y \\ J_z\Delta\dot{\omega} &= -m_z^a qS_M l_k \Delta\alpha - \frac{m_z^a qS_M l_k^2}{v}\Delta\dot{\omega} - \frac{F_p}{2}(x_c - x_g)\Delta\delta_\varphi + M_z \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\theta} &= \left( \frac{F_p\cos\alpha_0}{mv} + \frac{C_y^a qS_M}{mv} \right) \Delta\alpha + \frac{g\sin\theta_0}{v}\Delta\theta + \frac{F_p}{2mv}\Delta\delta_\varphi + \frac{F_y}{mv} \\ \Delta\dot{\omega} &= -\frac{m_z^a qS_M l_k^2}{J_z v}\Delta\dot{\omega} - \frac{m_z^a qS_M l_k}{J_z}\Delta\alpha - \frac{F_p(x_c - x_g)}{2J_z}\Delta\delta_\varphi + \frac{M_z}{J_z} \end{aligned}$$

另外有小角度假设  $\Delta\varphi = \Delta\alpha + \Delta\theta$ , 则俯仰通道扰动方程可简记为:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\theta} &= c_1\Delta\alpha + c_2\Delta\theta + c_3\Delta\delta_\varphi + \bar{F}_y \\ \Delta\dot{\omega} &= -b_1\Delta\dot{\omega} - b_2\Delta\alpha - b_3\Delta\delta_\varphi + \bar{M}_z \\ \Delta\varphi &= \Delta\alpha + \Delta\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\theta} &= c_1 \Delta \alpha + c_2 \Delta \theta + c_3 \Delta \delta_\phi + \bar{F}_y \\ \Delta \dot{\phi} &= -b_1 \Delta \phi - b_2 \Delta \alpha - b_3 \Delta \delta_\phi + \bar{M}_z \\ \Delta \varphi &= \Delta \alpha + \Delta \theta \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{(F_p \cos \alpha_0 + C_y^\alpha q S_M)}{mv}, c_2 = \frac{g \sin \theta_0}{v}, c_3 = \frac{F_p}{2mv} \\ b_1 = \frac{m_z^\alpha q S_M l_k^2}{J_z v}, b_2 = \frac{m_z^\alpha q S_M l_k}{J_z}, b_3 = \frac{F_p (x_c - x_g)}{2J_z} \end{cases}$$

$b_2 = \frac{m_z^\alpha q S_M l_k}{J_z}$  表示气动力矩对  $\Delta \phi$  的作用系数;

- ① 若气动压心在质心之前, 即  $b_2 < 0$ , 火箭静不稳定;
- ② 若气动压心在质心之后, 即  $b_2 > 0$ , 火箭静稳定。

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\theta} &= c_1 \Delta \alpha + c_2 \Delta \theta + c_3 \Delta \delta_\phi + \bar{F}_y \\ \Delta \dot{\phi} &= -b_1 \Delta \phi - b_2 \Delta \alpha - b_3 \Delta \delta_\phi + \bar{M}_z \\ \Delta \varphi &= \Delta \alpha + \Delta \theta \end{aligned}$$

忽略干扰力和力矩, 则俯仰通道的状态方程可表示为:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\phi} \\ \Delta \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 - c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b_2 & -b_2 & -b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \varphi \\ \Delta \delta_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 \\ 0 \\ -b_3 \end{bmatrix} \Delta \delta_\phi$$

记:

$$X = \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \varphi \\ \Delta \delta_\phi \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} c_2 - c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b_2 & -b_2 & -b_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c_3 \\ 0 \\ -b_3 \end{bmatrix}$$

则:

$$\dot{X} = AX + B\Delta \delta_\phi$$

$$\dot{X} = AX + B\Delta \delta_\phi$$

经拉氏变换, 得:

$$sX(s) = AX(s) + B\Delta \delta_\phi(s)$$

记:

$$\frac{X(s)}{\Delta \delta_\phi(s)} = (sI - A)^{-1}B$$

解得:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta \theta(s)}{\Delta \delta_\phi(s)} \\ \frac{\Delta \varphi(s)}{\Delta \delta_\phi(s)} \\ \frac{\Delta \dot{\phi}(s)}{\Delta \delta_\phi(s)} \end{bmatrix} = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{c_3 s^2 + b_1 c_3 s + b_2 c_3 - b_3 c_1}{s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2 c_2} \\ \frac{-[b_3 s + b_3(c_1 - c_2) - b_2 c_3]}{s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2 c_2} \\ \frac{-s[b_3 s + b_3(c_1 - c_2) - b_2 c_3]}{s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2 c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{\delta_\phi}^\theta(s) \\ W_{\delta_\phi}^\varphi(s) \\ W_{\delta_\phi}^{\dot{\phi}}(s) \end{bmatrix}$$

1. 火箭姿态控制
2. 稳定性
3. 火箭的线性化模型
4. 火箭的稳定性分析

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta \theta(s)}{\Delta \delta_\phi(s)} \\ \frac{\Delta \varphi(s)}{\Delta \delta_\phi(s)} \\ \frac{\Delta \dot{\phi}(s)}{\Delta \delta_\phi(s)} \end{bmatrix} = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{c_3 s^2 + b_1 c_3 s + b_2 c_3 - b_3 c_1}{s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2 c_2} \\ \frac{-[b_3 s + b_3(c_1 - c_2) - b_2 c_3]}{s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2 c_2} \\ \frac{-s[b_3 s + b_3(c_1 - c_2) - b_2 c_3]}{s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2 c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{\delta_\phi}^\theta(s) \\ W_{\delta_\phi}^\varphi(s) \\ W_{\delta_\phi}^{\dot{\phi}}(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{(F_p \cos \alpha_0 + C_y^\alpha q S_M)}{mv}, c_2 = \frac{g \sin \theta_0}{v}, c_3 = \frac{F_p}{2mv} \\ b_1 = \frac{m_z^\alpha q S_M l_k^2}{J_z v}, b_2 = \frac{m_z^\alpha q S_M l_k}{J_z}, b_3 = \frac{F_p (x_c - x_g)}{2J_z} \end{cases}$$



## 1. 起飞时刻 (1)

259

□ 起飞时刻速度 $v$ 很小, 因此**质心运动方程的系数 $c$ 较大**, 绕心运动方程的系数 $b$ 很小, 阻尼项更小。忽略气动阻尼项 $b_1$ 后, 则特征方程为:

$$D(s) = s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2c_2 \quad c_2 = \frac{g \sin \theta_0}{v}$$

$$\approx s^3 + (c_1 - c_2)s^2 + b_2s - b_2c_2$$

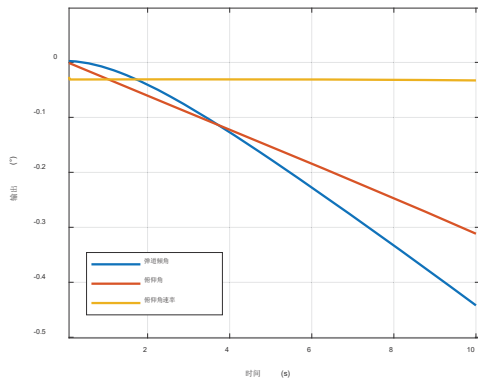
其中,  $(c_1 - c_2) > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,  $b_2$  和  $-b_2c_2$  不可能同时大于零, 由稳定性判据判断系统**不稳定**。

案例:  $t = 2s$  时,  $V = 25m/s$  此时

$$\begin{cases} c_1 = 0.98, c_2 = 0.414, c_3 = 0.25 \\ b_1 = 0, b_2 = 0.005, b_3 = 3.14 \end{cases}$$

## 1. 起飞时刻 (3)

261



## 2. 气动力矩系数最大时刻 (1)

263

□ 系数最大时刻 $|b_2|$ 最大,  $v$ 也很大, 故**质心运动方程系数较小**, 将长、短周期状态分离, 侧重体现短周期动力学特征, 则特征方程为:

$$D(s) = s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2c_2$$

$$\approx (s - c_2)(s^2 + b_1s + b_2)$$

$$c_2 = \frac{g \sin \theta_0}{v}$$

显然此时至少有一个正实根 $c_2$ (重力影响)在 $S$ 平面的右半平面, 系统**不稳定**。

案例:  $t = 22s$  时,  $V = 380m/s$  此时

$$\begin{cases} c_1 = 0.11, c_2 = 0.02, c_3 = 0.06 \\ b_1 = 1.20, b_2 = 9.10, b_3 = 5.10 \end{cases}$$

## 1. 起飞时刻 (2)

260

$$D(s) = s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2c_2$$

$$\approx s^3 + (c_1 - c_2)s^2 + b_2s - b_2c_2$$

a) 当 $b_2 < 0$ 时,  $D(s)$  可近似分解为:

$$D(s) \approx (s + c_1 - c_2)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)$$

$$\omega = \sqrt{-\frac{b_2c_2}{c_1 - c_2}}, \quad \zeta\omega = \frac{b_2c_1}{2(c_1 - c_2)^2} < 0$$

其中:

这时, 有一对复根在右半平面, 振荡发散

b) 当 $b_2 > 0$ 时,  $D(s)$  可进一步近似分解为:

$$D(s) \approx (s + c_1 - c_2) \left( s + \frac{b_2c_1}{2(c_1 - c_2)^2} + \sqrt{\frac{b_2c_2}{c_1 - c_2}} \right) \left( s + \frac{b_2c_1}{2(c_1 - c_2)^2} - \sqrt{\frac{b_2c_2}{c_1 - c_2}} \right)$$

其中:

$$\frac{b_2c_1}{2(c_1 - c_2)^2} - \sqrt{\frac{b_2c_2}{c_1 - c_2}} < 0$$

这时, 有一实根在右半平面, 单调发散

综上, 在起飞时刻无控时, 无论静稳定( $b_2 > 0$ )或静不稳定( $b_2 < 0$ ), 姿态运动均不稳定

## 1. 起飞时刻 (4)

262

各模式下各参数之比				
特征根	模态	$-(c_1 - c_2)$	$-\left(\frac{b_2c_1}{2(c_1 - c_2)^2} + \sqrt{\frac{b_2c_2}{c_1 - c_2}}\right)$	$-\left(\frac{b_2c_1}{2(c_1 - c_2)^2} - \sqrt{\frac{b_2c_2}{c_1 - c_2}}\right)$
				-0.5501 (收敛)
特征向量 (归一化)	弹道倾角表现	<b>61.5152</b>	<b>1.9751</b>	<b>1.5809</b>
	俯仰角表现	1.0000	1.0000	1.0000
	俯仰角速率表现	-0.5501	-0.0698	0.0539

① 质心运动的系数 $c$ 较大, 长周期量(弹道倾角)在三个模式下的占比最大【将长周期状态方程提出, 简化特征方程】

② 由于绕心运动的系数 $b$ 很小, 且俯仰角速率表现最小, 可忽略阻尼项 $b_1$

## 2. 气动力矩系数最大时刻 (2)

264

$$D(s) \approx (s - c_2)(s^2 + b_1s + b_2)$$

a) 当 $b_2 > 0$ 时:

$$s^2 + b_1s + b_2 = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$$

其中

$$\omega = \sqrt{b_2}, \quad \zeta\omega = \frac{b_1}{2} > 0$$

此时只有 $c_2$ 一个实根在右半平面

b) 当 $b_2 < 0$ 时:

$$s^2 + b_1s + b_2 = \left( s + \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} \right) \left( s + \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} \right)$$

$$\approx (s - \sqrt{|b_2|}) (s + \sqrt{|b_2|}) \quad \text{忽略 } b_1$$

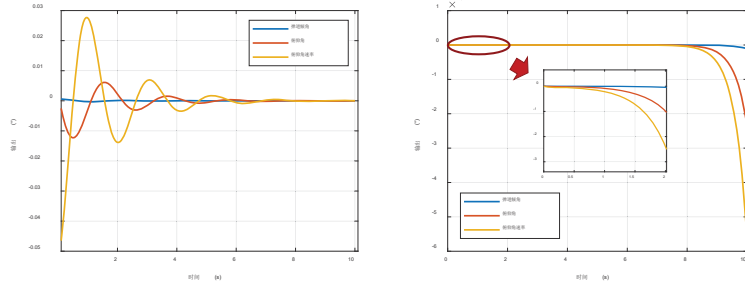
此时除了 $c_2$ 外, 还有个实根在右半平面

综上, 在最大动压段无控时, 若1)  $b_2 > 0$ 静稳定, 则在重力作用下振荡缓慢发散

2)  $b_2 < 0$ 静不稳定, 则在气动力矩作用下单调迅速发散

## 2. 气动力矩系数最大时刻 (3)

265



当  $b_2 > 0$  时, 振荡缓慢发散

当  $b_2 < 0$  时, 单调迅速发散

(注: 迅速离开“线性区”)

## 2. 气动力矩系数最大时刻 (5)

267

静不稳定各模式下各参数之比

特征根	模态	$c_2$	$\sqrt{ b_2 }$	$-\sqrt{ b_2 }$
		0.0203 (发散)	2.4099 (发散)	-3.7202 (收敛)
特征 向量 (归一化)	弹道倾角表现	0.9973	0.0440	-0.0303
	俯仰角表现	1.0000	1.0000	1.0000
	俯仰角速率表现	<b>0.0203</b>	<b>2.4099</b>	<b>-3.7202</b>

- ① 绕心运动的系数  $b$  较大, 短周期量 (俯仰角速率) 在单调收敛/发散模式下的表现占比最大, 可将短周期状态方程提出, 简化特征方程
- ② 质心运动的系数  $c$  较小, 即使在长周期的发散模式下, 也与短周期量表现占比相当, 可忽略  $c_1$ , 且  $|b_2|$  远远大于  $b_1$ , 可忽略  $b_1$

## 3. 关机前时刻 (2)

269

$$D(s) \approx (s + c_1 - c_2)s^2$$

其中, 不论  $(c_1 - c_2)$  是否大于零, 系统均在原点有两个特征根。

综上, 在关机前时刻无控时, 弹体是不能稳定飞行的。一有外干扰姿态角就会逐渐增大, 既或外干扰消失后, 姿态角也不会回复到初始状态。

## 2. 气动力矩系数最大时刻 (4)

266

静稳定各模式下各参数之比

特征根	模态	$c_2$	$\omega = \sqrt{b_2}, \zeta\omega = \frac{b_1}{2} > 0$	
		0.0197 (发散)	-0.6549 ± 2.9673i (振荡)	
特征 向量 (归一化)	弹道倾角表现	1.0026	0.0364exp(-100.7778°i)	0.0364exp(100.7778°i)
	俯仰角表现	1.0000	1.0000	1.0000
	俯仰角速率表现	<b>0.0197</b>	<b>3.0387exp(102.4451°i)</b>	<b>3.0387exp(-102.4451°i)</b>

- ① 绕心运动的系数  $b$  较大, 短周期量 (俯仰角速率) 在振荡模式下的表现占比最大, 【将短周期状态方程提出, 简化特征方程】
- ② 质心运动的系数  $c$  较小, 即使在长周期的发散模式下, 也与短周期量表现占比相当

## 3. 关机前时刻 (1)

268

□ 此时高度很高, 空气非常稀薄, 气动力矩系数  $b_1, b_2$  较小。忽略  $b_1, b_2$  后, 传递函数为:

$$D(s) = s^3 + (b_1 + c_1 - c_2)s^2 + [b_2 + b_1(c_1 - c_2)]s - b_2c_2$$

$$\approx (s + c_1 - c_2)s^2$$

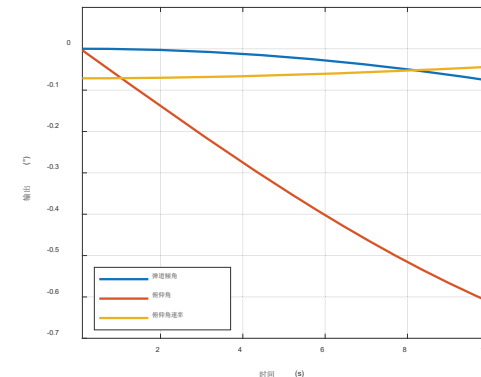
该方程在原点上有两个特征根, 系统不稳定。

案例: 一级关机时刻  $t = 70s$  时,  $V = 1902m/s$ ,  $h = 60km$  时

$$\begin{cases} c_1 = 0.022, c_2 = 0.041, c_3 = 0.002 \\ b_1 = 0.001, b_2 = 0.009, b_3 = 7.2 \end{cases}$$

## 3. 关机前时刻 (3)

270





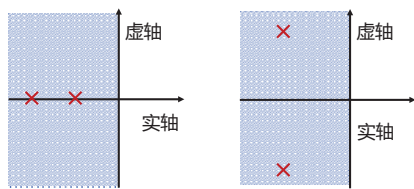


姿态稳定是火箭正常飞行的必要条件，分为绝对稳定性和相对稳定性

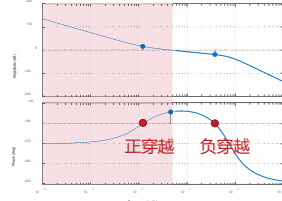
绝对稳定性判据

通过闭环传递函数分析：系统的闭环传递函数所有极点均位于左半平面。

通过开环传递函数分析：当角频率ω由0变化到+∞时，开环幅值对数频率特性在20lg|G(jω)|大于0的频段范围内，相频特性正、负穿越-n线的次数差为p/2。p为开环传递函数位于右半平面的极点个数。



通过闭环传递函数分析



通过开环传递函数分析

2. 精度指标

为了使飞行弹道在各种干扰作用下，不过大的偏离标准弹道，以满足小扰动条件，要求控制系统的状态量 Δφ(t), ψ(t), γ(t), Δδφ(t), δv(t), δγ(t) 小于各自的允许值，因此，状态量的控制精度也是一个非常重要的设计指标。

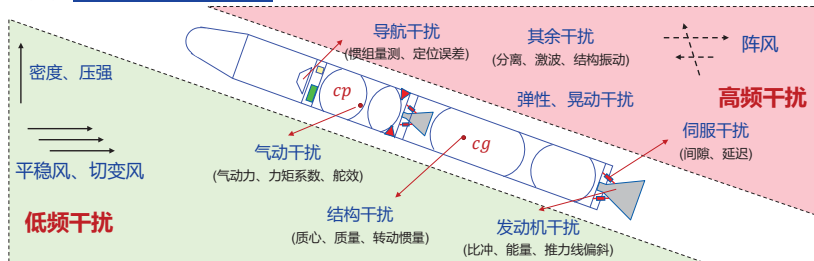
Mathematical equations for system dynamics and control precision, including terms like Jz, ωbz, and Δφ.

除此之外，不同飞行阶段，对精度的要求也非绝对，应该根据实际控制任务确定：

- ① 大风区对姿态角的跟踪精度
② 入轨时对轨道面的控制精度

4. 抗干扰指标

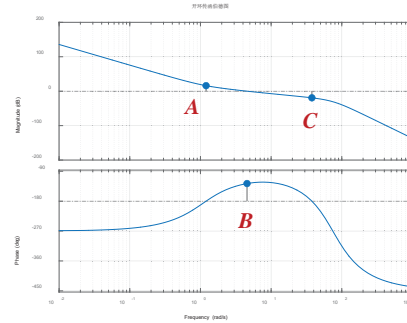
抗干扰能力是姿态控制系统设计的重要指标，火箭飞行过程中会受到许多干扰，可分为低频干扰和高频干扰。



- 对低频的干扰：能够产生足够的控制力与之平衡（补偿/抵消）
• 对高频干扰：抑制/衰减其不利影响（与系统的稳定性和快速性相矛盾）

相对稳定性

为了保证系统动态品质和适应参数变化，还必须考虑相对稳定性。一般用幅、相稳定裕度来表示。



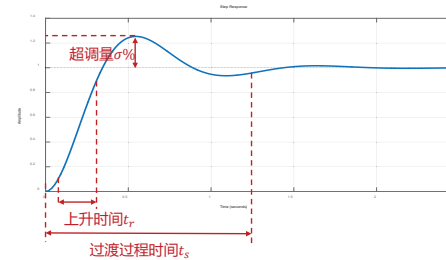
- > 开环幅值为0dB(B点)的频率称之为截止频率ωc, 截止频率处的相位为 φc, 相位裕度PM定义为 PM = φc - (-180°)
> 开环相位穿越-180°(A, C点)的频率称之为相位穿越频率 ωc', 幅值裕度GM定义为:

GM = 20lg 1 / |G(jωpc)|

- ✓ 相位裕度越大，系统越“稳”，但响应越慢，快速性欠佳。良好的系统一般控制在：相位裕度40°左右，幅值裕度应大于6dB。

3. 动态性能指标

动态性能指过渡过程时间、超调量、振荡次数等。与系统稳定性密切相关。经典控制理论中，系统的频率特性确定之后，时域的动态性能也随之基本确定。



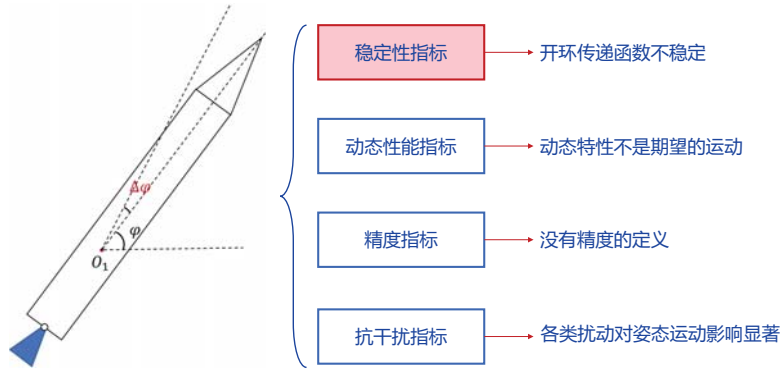
- 火箭飞行具有非线性、变参数等特点，其与稳定性的关系是未知的，需要单独提出，依靠数值仿真验证。

目录

- 1. 火箭姿态控制的性能指标
2. 姿态控制器设计
3. 控制系统鲁棒性分析
4. 可用带宽



□ 无控火箭不满足各类指标要求



执行机构环节

□ 实际控制系统中，由于执行机构存在物理约束（例如最大摆角、最大摆动速度等约束），使得计算得到的控制指令  $\delta_\phi$  不能直接作用在被控对象的动力学上，需要经过一个伺服环节。



✓ 由于**执行机构的存在**，会导致系统的**稳定性、动态性能**受到影响，在进行控制器设计时，需要考虑执行机构的传递函数，一般采用一阶环节或二阶环节等效。

- 一阶环节  $\frac{1}{Ts+1}$  其中  $T$  为可调参数
- 二阶环节  $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$  其中  $\omega_n, \xi$  为可调参数

✓ 下面以一阶环节为例

姿态角误差反馈 (2)

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_3 \end{bmatrix} \Delta\delta_\phi$$

将状态空间表达采用传递函数表示：

$$\Delta\dot{\psi} = -b_2\Delta\phi - b_1\Delta\psi - b_3\Delta\delta_\phi$$

$$s^2\Delta\phi(s) + b_1s\Delta\phi(s) + b_2\Delta\phi(s) = -b_3\Delta\delta_\phi(s)$$

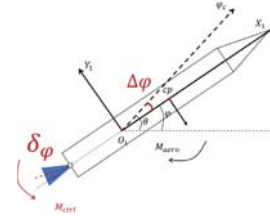
$$\frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_\phi(s)} = -\frac{b_3}{s^2 + b_1s + b_2}$$

系统的开环传递函数为：

$$G_{S_{Openloop}} = \frac{k_p b_3}{(T_c s + 1)(s^2 + b_1 s + b_2)}$$

□ 控制器的设计策略：基于误差来消除误差（线性框架下的PID）

根据姿态角误差等信息，通过偏转发动机产生控制力矩，平衡不稳定的力矩，减小姿态角误差（绝对值），使得姿态角误差动态满足稳定性要求。



- ① 量测到当前姿态与期望姿态的偏差  $\Delta\phi$
- ② 根据误差信号输出指令舵偏角  $\delta_\phi$
- ③ 产生能够让误差减小的控制力矩  $M_{ctrl}$
- ④ 误差  $\Delta\phi$  减小

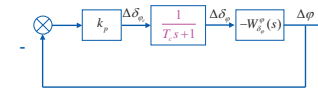
反馈：实时根据当前状态与期望状态之差（姿态角误差、角速度误差、误差积分）计算控制指令

姿态角误差反馈 (1)

□ 基于PID的设计思想，选取**姿态角误差**作为反馈量，控制方程为：

$$\Delta\delta_\phi = k_p \Delta\phi$$

相应的，闭环系统的控制框图如下：



为了简化讨论，忽略质心运动，先分析姿态运动的稳定性：

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 - c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b_2 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\phi \\ \Delta\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 \\ 0 \\ -b_3 \end{bmatrix} \Delta\delta_\phi \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_3 \end{bmatrix} \Delta\delta_\phi$$

姿态角误差反馈 (3)

**绝对稳定性** 根据开环传递函数求系统的闭环传递函数为：

$$G_{S_{CloseLoop}} = \frac{k_p b_3 \frac{1}{T_c}}{s^3 + \left(b_1 + \frac{1}{T_c}\right)s^2 + \left(b_2 + \frac{b_1}{T_c}\right)s + (b_2 + k_p b_3) \frac{1}{T_c}}$$

其中， $\frac{1}{T_c} = \omega_c$  为伺服系统的开环增益（ $\omega_c$  越大，伺服响应速度越快）。

$$G_{S_{CloseLoop}} = \frac{k_p b_3 \omega_c}{s^3 + (b_1 + \omega_c)s^2 + (b_2 + b_1 \omega_c)s + (b_2 + k_p b_3)\omega_c}$$

✓ 若保证系统稳定，根据Lienard-Chipard判据，须满足以下条件：

- $b_2 + b_1 \omega_c > 0$  即  $\omega_c > -b_2/b_1$
- $b_2 + k_p b_3 > 0$  即  $k_p > -b_2/b_3$
- $(b_1 + \omega_c)(b_2 + b_1 \omega_c) > (b_2 + k_p b_3)\omega_c$  由于  $\omega_c \gg b_1$ ，所以可化简为  $\omega_c > \frac{k_p b_3}{b_1}$

若要满足:

- a)  $\omega_c > -b_2/b_1$
- b)  $k_p > -b_2/b_3$
- c)  $\omega_c > k_p b_3/b_1$

则  $\omega_c$  取值需要很大, 以气动力矩最大的点为例说明:

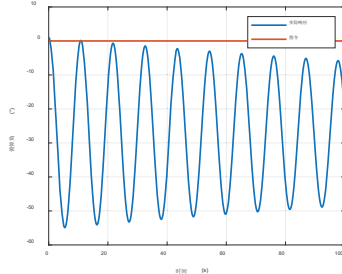
$$b_1 = 0.1, b_2 = -9.1, b_3 = 5.1$$

若要使得系统稳定,  $\omega_c > 91s^{-1}$ , 对伺服的性能提出了较高的要求, 对于这个系统来说, 需要伺服的时间常数  $T < 0.01s$ , 即需要在  $3T = 0.03s$  内完成对指令的响应。

下面, 取  $\omega_c = 100s^{-1}$ , 代入开环传递函数中, 开环传递函数变为:

$$G_{S_{Openloop}} = \frac{5.1k_p}{(0.01s+1)(s^2+0.1s-9.1)}$$

增益的范围有限, 相应的闭环极点距离虚轴十分接近, 这会使得系统具有较大的震荡, 取  $k_p = 1.85$ , 时域仿真结果如下:



> 上图中, 系统由不稳定变为稳定, 但是, 该闭环系统显然不满足动态性能指标。

$$\dot{V} = \dot{\theta}[(k_v - a)\theta - (k - a)\theta] = (k_v - k)\dot{\theta}\theta$$

当  $k_v = k > a$ , 上式能量守恒, 系统临界稳定。现加入伺服系统:

$$T\dot{u} + u = u_{cmd}$$

则系统方程转变为:

$$\ddot{\theta} - a\theta = u = u_{cmd} - T\dot{u} = -k\theta - T\dot{u}$$

即:

$$\ddot{\theta} = (a - k)\theta - T\dot{u} \quad \dot{u} = \dot{u}_{cmd} = -k\theta \rightarrow \text{减小阻尼作用}$$

代入李雅普诺夫函数中, 得:

$$\dot{V} = \dot{\theta}[(k - a)\theta + (a - k)\theta - T\dot{u}] = -T\dot{u}\dot{\theta}$$

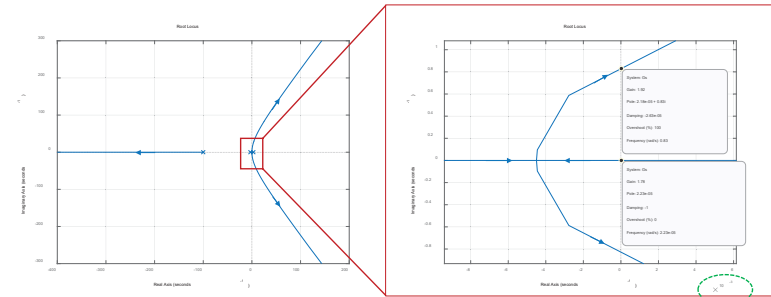
近似认为  $\dot{u} = \dot{u}_{cmd} = -k\dot{\theta}$ , 上式化为:

$$\dot{V} = Tk\dot{\theta}^2 \geq 0$$

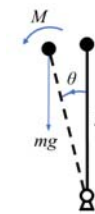
说明李雅普诺夫函数越来越大, 即能量越来越大, 系统不稳定。

$$G_{S_{Openloop}} = \frac{5.1k_p}{(0.01s+1)(s^2+0.1s-9.1)}$$

使用根轨迹图确定  $k_p$  :



◆ 一种物理解释 将火箭模型与倒立摆模型类比:



$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta + M$$

令  $a = g/l$ ,  $u = M/ml^2$  则系统简化为

$$\ddot{\theta} - a\theta = u \quad \leftarrow \Delta\ddot{\phi} + b_1\Delta\dot{\phi} + b_2\Delta\phi = -b_3\Delta\delta_\phi$$

根据现代控制方法, 设计李雅普诺夫函数:

$$V = (k_v - a)(1 - \cos \theta) + \frac{\dot{\theta}^2}{2}$$

$k_v > a$  时上式恒大于0。其中  $(k_v - a)(1 - \cos \theta)$  可理解为势能,  $\frac{\dot{\theta}^2}{2}$  可理解为动能, 求得:

$$\dot{V} = (k_v - a)\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}\ddot{\theta} \approx \dot{\theta}[(k_v - a)\theta + \ddot{\theta}]$$

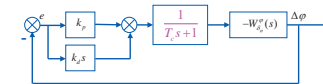
引入角误差反馈  $u = -k\theta$  时,  $\ddot{\theta} - a\theta = u$  变为  $\ddot{\theta} + (k - a)\theta = 0$ , 代入上式可得:

问题: 如何改进姿态角反馈控制?

在姿态角反馈的基础上, 增加  $\Delta\dot{\phi}$  反馈信号 (增加阻尼作用):

$$\Delta\delta_\phi = k_p\Delta\phi + k_d\Delta\dot{\phi}$$

相应的, 闭环系统的控制框图为:



系统开环传递函数变为:

$$G_S = -(k_p + k_d s) \frac{W_{\Delta\phi}^d(s)}{T_c s + 1}$$

系统闭环传递函数为:

$$G_{S_{\text{CloseLoop}}} = \frac{k_p b_3 \omega_c}{s^3 + (b_1 + \omega_c)s^2 + (b_2 + b_1 \omega_c + b_3 k_d \omega_c)s + (b_2 + k_p b_3) \omega_c}$$

$b_1$ 为小量, 上式简化为:

$$G_{S_{\text{CloseLoop}}} = \frac{k_p b_3 \omega_c}{s^3 + \omega_c s^2 + (b_2 + b_3 k_d \omega_c)s + (b_2 + k_p b_3) \omega_c}$$

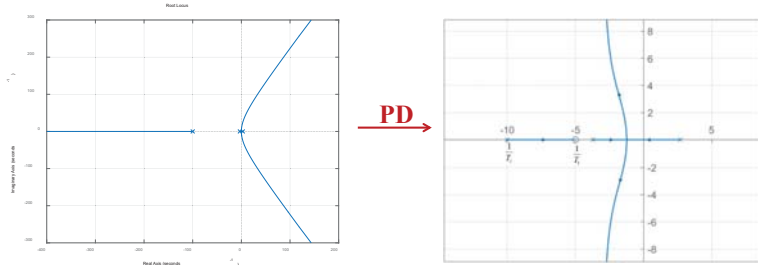
↑  
姿态角反馈  
从闭环传递函数的角度理解PD作用

系统稳定的条件为:

- a)  $b_2 + b_3 k_d \omega_c > 0$  即  $b_3 k_d \omega_c > -b_2$
- b)  $b_2 + k_p b_3 > 0$  即  $k_p b_3 > -b_2$
- c)  $\omega_c (b_2 + b_3 k_d \omega_c) > (b_2 + k_p b_3) \omega_c$  即  $\frac{k_d}{k_p} > \frac{1}{\omega_c}$

执行机构环节对稳定性的影响

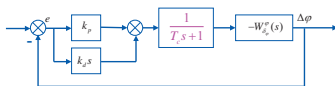
系统的根轨迹图如下:



配置系统的闭环极点, 完成稳定控制:

PD控制的静态误差分析

姿态角的控制框图:



开环传递函数:

$$G(s) = -(k_p + k_d s) W_e(s) = \frac{(k_p + k_d s) b_3}{(T_i s + 1)(s^2 + b_2 s + b_2)}$$

系统为0型系统, 开环增益  $K = \frac{k_p b_3}{b_2}$ , 不同输入的稳态误差如下:

系统型别	$\Delta \phi_r = 1(t)$ 稳态误差	$\Delta \phi_r = t$ 稳态误差	$\Delta \phi_r = t^2 / 2$ 稳态误差
0型系统	$\frac{1}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
I型系统	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$
II型系统	0	0	$\frac{1}{K}$

□ 系统稳定的条件为:

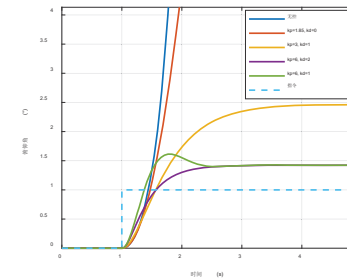
- a)  $b_2 + b_3 k_d \omega_c > 0$  即  $b_3 k_d \omega_c > -b_2$
- b)  $b_2 + k_p b_3 > 0$  即  $k_p b_3 > -b_2$
- c)  $\omega_c (b_2 + b_3 k_d \omega_c) > (b_2 + k_p b_3) \omega_c$  即  $\frac{k_d}{k_p} > \frac{1}{\omega_c}$

其中, 只要b)和c)成立, a)一定成立。此外, 可以看出:

- ① 条件b)要求: **系统产生的控制力矩大于不稳定气动力矩**
- ② 条件c)要求: **微分校正的时间常数大于伺服系统的时间常数**, 伺服系统的相位滞后可由微分校正的相位来补偿

PD控制的系统动态特性分析

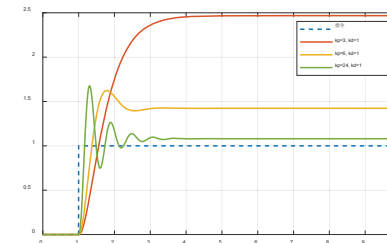
系统时域响应图如下:



通过调整  $k_p, k_d$ , 改变系统的动态性能。但是, 系统一直具有稳态误差, 需要引入新的控制项, 解决稳态误差的问题。

PD控制的静态误差分析

□ 增大  $k_p$  可减小稳态误差, 但过大的  $k_p$  会降低稳定裕度, 导致系统振荡甚至失稳。

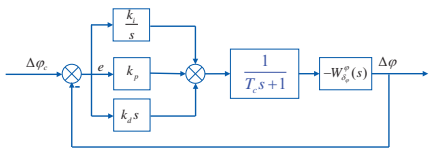


$$K = \frac{k_p b_3}{b_2} \uparrow$$

问题: 除增加比例控制增益外, 是否有其他方法减小静误差?

在PD控制的基础上，加入姿态角误差的积分项消除稳态误差：

$$\delta_\varphi = k_p \Delta\varphi + k_d \Delta\dot{\varphi} + k_i \int_0^t \Delta\varphi dt$$



系统类型	$\Delta\varphi_c = 1(t)$ 稳态误差	$\Delta\varphi_c = t$ 稳态误差	$\Delta\varphi_c = t^2/2$ 稳态误差
0型系统	$\frac{1}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
I型系统	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$
II型系统	0	0	$\frac{1}{K}$

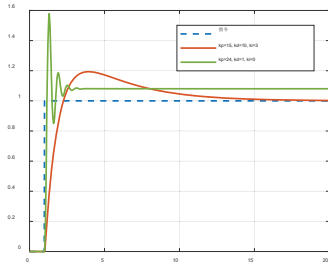
开环传递函数：

$$G(s) = -(k_p + k_d s + \frac{k_i}{s}) W_\varphi^e(s) = \frac{(k_p s^2 + k_d s + k_i) b_3}{s(T_s s + 1)(s^2 + b_1 s + b_2)}$$

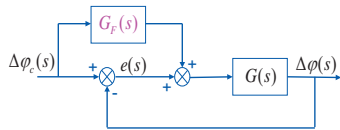
✓ 通过加入积分项，将系统改造为I型系统，对阶跃指令无稳态误差。

稳态误差消除机理：

- PD：抵抗 气动力矩与干扰力矩 的控制力矩的存在需要有一定的姿态角误差
- PID：控制力矩不由姿态角误差产生，而是由姿态角误差的积分值产生



复合控制是在反馈控制的基础上，加入前馈通路。前馈通路可以减小稳态控制误差，不影响系统稳定性。



其中  $G_f(s)$  为前馈通路传递函数， $G(s) = -(k_p + k_d s) \frac{W_\varphi^e(s)}{T_s s + 1}$  为姿态控制系统开环传递函数。

✓ 前馈通路作用机理：在系统中增加一个输入信号  $G_f(s)\Delta\varphi_c(s)$ ，其产生的误差信号与原输入信号  $\Delta\varphi_c(s)$  产生的误差信号相比，大小相同而符号相反。

问题：如何设计前馈通路传递函数  $G_f(s)$ ？

误差消除机理：抵抗气动力矩与干扰力矩的控制力矩的存在需要有一定的发动机摆角

- PD：发动机摆角是由姿态角误差产生
- PID：发动机摆角是由姿态角误差的积分值产生

$$J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = -m_z^e q S_M l_\alpha - \frac{m_z^e q S_M l_\alpha^2}{v} \omega_z - \frac{F_p}{2} (x_c - x_g) \delta_\varphi + M_z$$

稳态时， $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$

$$\text{力矩平衡需要发动机摆角 } \frac{F_p}{2} (x_c - x_g) \delta_\varphi = -m_z^e q S_M l_\alpha + M_z$$

PD PID

$$\delta_\varphi = k_p \Delta\varphi + k_d \Delta\dot{\varphi}$$

$$\delta_\varphi = k_p \Delta\varphi + k_d \Delta\dot{\varphi} + k_i \int_0^t \Delta\varphi dt$$

稳态时， $\Delta\dot{\varphi} = 0$

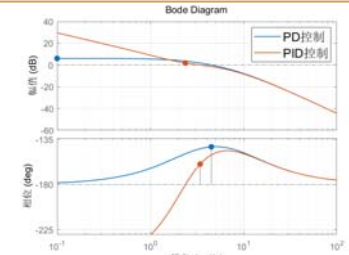
当  $\Delta\varphi$  收敛到0，积分项收敛

$$\frac{F_p}{2} (x_c - x_g) k_p \Delta\varphi = -m_z^e q S_M l_\alpha + M_z$$

$$\frac{F_p}{2} (x_c - x_g) k_i \int_0^t \Delta\varphi dt = -m_z^e q S_M l_\alpha + M_z$$

PID控制：

$$\begin{aligned} \delta_\varphi &= k_p \Delta\varphi + k_d \Delta\dot{\varphi} + k_i \int_0^t \Delta\varphi dt \\ \delta_\varphi(s) &= k_p \Delta\varphi(s) + k_d s \Delta\varphi(s) + k_i \frac{\Delta\varphi(s)}{s} \\ &\approx k_d \left( s + \frac{k_p}{k_d} \right) \left( \frac{s + k_i/k_p}{s} \right) \Delta\varphi(s) \end{aligned}$$



积分降低相位裕度

✓ 积分反馈给系统的开环传递函数增加一个极点  $s = 0$ ，一个零点  $s = -k_i/k_p$ 。这就使闭环系统增加一个靠近原点的特征根，降低了系统稳定裕度。因此积分系数  $k_i$  不能过大。

问题：其他消除稳态误差的方法？



$$G(s) = -(k_p + k_d s) \frac{W_\varphi^e(s)}{T_s s + 1}$$

误差信号的传递函数为：

$$\frac{e(s)}{\Delta\varphi_c(s)} = \frac{1 - G_f(s)G(s)}{1 + G(s)}$$

当输入为单位阶跃函数时，即  $\Delta\varphi_c(s) = \frac{1}{s}$ ，则

$$e(s) = \frac{1 - G_f(s)G(s)}{1 + G(s)} \Delta\varphi_c(s) = \frac{1 - G_f(s)G(s)}{s(1 + G(s))}$$

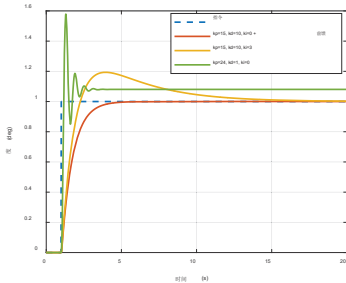
由稳态误差定义，根据终值定理得：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - G_f(s)G(s)}{1 + G(s)}$$

若使  $e(s) = 0$ ，则需  $\lim_{s \rightarrow 0} (1 - G_f(s)G(s)) = 0$ ，选取：

$$G_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(T_s s + 1)(s^2 + b_1 s + b_2)}{(k_p + k_d s) b_3} = \frac{b_3}{k_p b_3}$$

□ 复合控制能够解决：反馈控制在提高控制精度和确保稳定性之间的矛盾。



✓ 注：前馈通路是一种开环控制，需要构成前馈补偿环节具有较高的参数稳定性，否则将抵消补偿效果，并给输出造成新的误差。

风产生的稳态误差 (1)

□ 风引起的姿态角偏差：

风是火箭姿态控制的主要干扰之一。下面研究慢变化风（常值风和正弦形式风）干扰作用下引起稳态的姿态角偏差。考虑风对姿态动力学的影响（风攻角所产生的不利影响）：

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\varphi} \\ \Delta\dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_3 \end{bmatrix} \Delta\alpha_w + \begin{bmatrix} 0 \\ -b_2 \end{bmatrix} \alpha_w$$

稳态时，假设动态项为0，上式变为：

$$0 = -b_2\Delta\varphi - b_3\Delta\delta - b_2\alpha_w$$

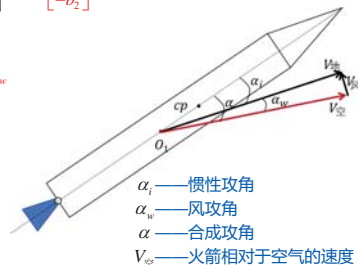
联立稳态时的PD控制方程  $\Delta\delta = k_p\Delta\varphi$ ，解得：

$$\Delta\varphi = -\frac{b_2}{b_2 + b_3k_p} \alpha_w$$

由  $b_2 = -9.1, b_3 = 5.1, k_p = 6$  得：

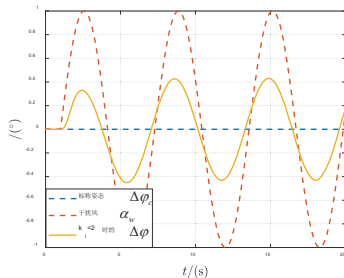
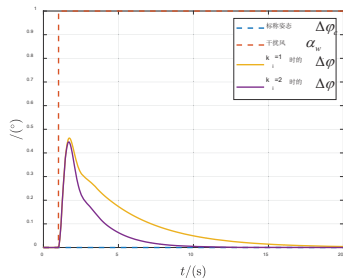
$$\Delta\varphi = 0.42\alpha_w$$

✓ 在PD控制下，风干扰会引起稳态误差



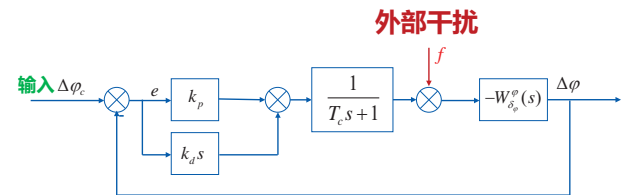
积分项消除风干扰误差 (2)

□ 在PD控制中加入积分项，消除平稳风引起的姿态角偏差



□ 当风干扰随时间变化时，积分项效果不理想。是否还有其他技术途径（前馈控制思想）？

□ 除输入带来的稳态误差外，在外部干扰作用下，也会产生误差。两种误差框图如下所示：

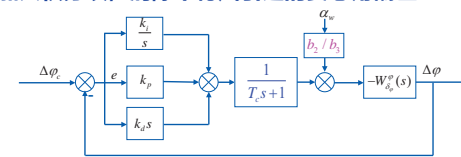


下面，分析两类外干扰引起的稳态误差：

- ① 风干扰
- ② 其他低频干扰

积分项消除风干扰误差 (1)

□ 在PD控制中加入积分项，消除平稳风引起的姿态角偏差



干扰误差传递函数：

$$\frac{e(s)}{\alpha_w} = \frac{\frac{b_2}{b_3} W_{\delta}^o(s)}{1 - \left( \frac{k_i + k_p s + k_d s^2}{s} \right) \frac{1}{T_c s + 1} W_{\delta}^o(s)} = \frac{b_2 (T_c s + 1) s}{(T_c s + 1)(s^2 + b_1 s + b_2) s + (k_i + k_p s + k_d s^2) b_3}$$

当  $\alpha_w$  为阶跃输入时， $\alpha_w = \frac{1}{s}$ ：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{-b_2 (T_c s + 1) s}{(T_c s + 1)(s^2 + b_1 s + b_2) s + (k_i + k_p s + k_d s^2) b_3} = 0$$

积分项消除风干扰误差 (3)

□ 当风干扰输入1rad/s的正弦形式时，计算风干扰误差的幅值和相位：

$$\frac{e(s)}{\alpha_w} = \frac{b_2 (T_c s + 1) s}{(T_c s + 1)(s^2 + b_1 s + b_2) s + (k_i + k_p s + k_d s^2) b_3}$$

$$\Downarrow \quad s = j\omega$$

$$\frac{e(j\omega)}{\alpha_w} = \frac{-b_2 T_c \omega^2 + b_2 \omega j}{T_c \omega^4 - (T_c b_2 + b_1 + k_d b_3) \omega^2 + k_i b_3 + [(b_2 + k_p b_3) \omega - (T_c b_1 + 1) \omega^3] j}$$

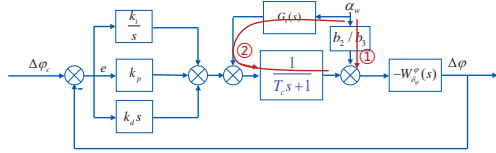
$$b_1 = 0.1, b_2 = -9.1, b_3 = 5.1, T_c = 0.01 \quad \Downarrow \quad k_p = 6, k_d = 1, k_i = 2, \omega = 1$$

$$\Phi(j\omega) \approx \frac{180 + 45j}{425}$$

$$A_e = |\Phi(j\omega)| \approx 0.43 \quad \varphi = \angle \Phi(j\omega) \approx 14^\circ$$

□ 问题：是否还有其他技术途径（前馈控制思想）？

□ **假设风攻角可量测**，可通过前馈通路 $G_1(s)$ 消除外干扰产生的稳态误差：



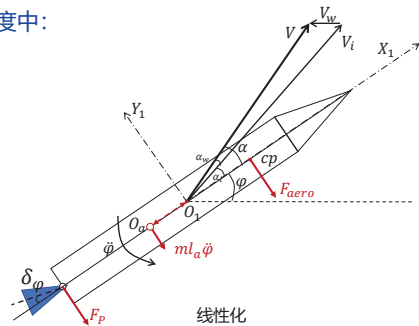
✓ 作用机理：使回路②抵消回路①的作用，风干扰的影响即可被完全消除：

$$G_1(s) \frac{1}{T_c s + 1} + \frac{b_2}{b_3} = 0$$

◆ 作用机理的物理解释：通过舵偏产生力矩去抵消风攻角产生的力矩

### 加速度表量测

□ 加速度表固连在箭体上，能够感知三轴视加速度，在俯仰通道的控制中，风干扰信息在箭体y轴视加速度中：



$$\ddot{y} = \frac{C_y^\alpha q S_M (\alpha_i + \alpha_w)}{m} + \frac{F_P}{m} \delta_\varphi + l_a \ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \Delta \ddot{y} = \frac{C_y^\alpha q S_M (\Delta \alpha_i + \alpha_w)}{m} + \frac{F_P}{m} \Delta \delta_\varphi + l_a \Delta \ddot{\varphi}$$

### 风干扰完全补偿控制 (2)

由短周期方程  $\Delta \ddot{\varphi} + b_1 \Delta \dot{\varphi} + b_3 \delta_\varphi = -b_2 (\Delta \alpha_i + \alpha_w)$

将  $\delta_\varphi = (1 - k_3 g_2)^{-1} [k_p \Delta \varphi + k_d \Delta \dot{\varphi} + g_2 k_2 (\Delta \alpha_i + \alpha_w)]$  代入，可得

$$(1 - g_2 k_3) \Delta \ddot{\varphi} + (b_1 - g_2 k_3 b_1 + b_3 k_d) \Delta \dot{\varphi} + k_p b_3 \Delta \varphi = -[b_2 - g_2 (k_3 b_2 - k_2 b_3)] (\Delta \alpha_i + \alpha_w)$$

从上式看出，若想要风干扰引起的姿态角误差变化最小，则应有：

$$b_2 - g_2 (k_3 b_2 - k_2 b_3) = 0$$

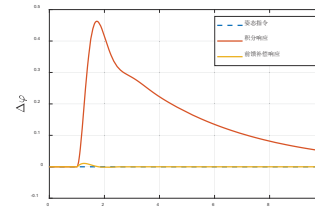
即：

$$g_2 = \frac{b_2}{k_3 b_2 - k_2 b_3}$$

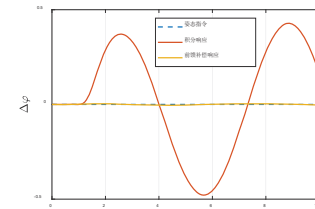
此时完全考虑了风干扰的影响，使得由于风带来的姿态角偏差为零，完全补偿了风干扰的不利影响。

补偿器  $G_1(s) = -(T_c s + 1) b_2 / b_3$  分子次数高于分母，物理不可实现，考虑到  $T_c$  很小，补偿器可简化为：

$$G_1(s) = -b_2 / b_3$$



对常值风干扰的响应



对变化风干扰的响应

➤ 注：考虑到测量精度以及安装和使用等问题，运载火箭一般不采用攻角传感器，而选用安装使用更为方便的加速度表以敏感风干扰的影响。

### 风干扰完全补偿控制 (1)

□ 风干扰完全补偿控制就是通过对风干扰的补偿，使风对姿态角的影响最小。传感器为加速度表，以俯仰通道为例，加表测量为：

$$\Delta \ddot{y} = k_2 (\Delta \alpha_i + \alpha_w) + k_3 \delta_\varphi + l_a \Delta \ddot{\varphi}$$

式中， $k_2 = \frac{C_y^\alpha q S_M}{m}$ ,  $k_3 = \frac{F_P}{m}$ ,  $l_a = X_c - X_a$ ,  $X_a$  为加速度表的安装位置，可以通过调整传感器摆放位置，或者在质心两侧摆放一对加表的方式，将  $l_a \Delta \ddot{\varphi}$  的影响消除。量测变为：

$$\Delta \ddot{y} = k_2 (\Delta \alpha_i + \alpha_w) + k_3 \delta_\varphi$$

此时的控制方程变为：

$$\delta_\varphi = k_p \Delta \varphi + k_d \Delta \dot{\varphi} + g_2 \Delta \ddot{y}$$

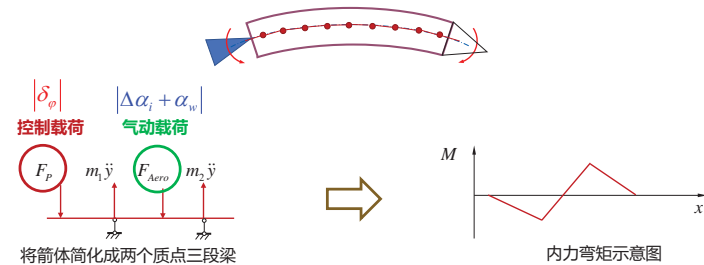
将加表量测代入，进一步化简得：

$$\delta_\varphi = (1 - k_3 g_2)^{-1} [k_p \Delta \varphi + k_d \Delta \dot{\varphi} + g_2 k_2 (\Delta \alpha_i + \alpha_w)]$$

### 弯矩载荷

□ 运载火箭飞行过程中，会受到**横向静载荷(稳态载荷)**，其主要是：在刚体方程和控制方程所组成的姿控系统，在外界干扰(主要是风干扰)作用下，引起的攻角 $\alpha$ 或侧滑角 $\beta$ 的**气动载荷**和发动机摆角 $\delta$ 所产生**控制载荷**。这两项载荷占总载荷的70%~80%。

在分析时，可以将箭体看成一连串质点组成的连续梁，在每个质点处，受到惯性力作用：





- 在完全补偿控制中，风引起的干扰力矩由发动机摆喷提供的额外控制力矩平衡，这就导致箭体内部承受的载荷提高，当载荷大到一定值时，甚至可能折断箭体。
- 工程上在使用加表反馈时，需要保证载荷在合理范围，因此，只能补偿一部分风干扰引起的误差。

根据短周期方程：

$$\begin{cases} \Delta\ddot{\varphi} + b_1\Delta\dot{\varphi} + b_3\delta_\varphi = -b_2(\Delta\alpha_i + \alpha_w) \\ \delta_\varphi = k_p\Delta\varphi + k_d\Delta\dot{\varphi} + g_2[k_2(\Delta\alpha_i + \alpha_w) + k_3\delta_\varphi] \end{cases}$$

忽略动态项  $\Delta\ddot{\varphi}, \Delta\dot{\varphi}$  后，且短周期内  $\Delta\varphi = \Delta\alpha_i$ ，得：

$$\Delta\varphi = \frac{-[b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)]}{k_p b_3 + b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)} \alpha_w$$

✓ 当  $g_2 = \frac{b_2}{k_3b_2 - k_2b_3}$ ，那么由于风带来的姿态角偏差变为0，此时完全补偿风干扰误差。

风干扰补偿控制 (3)

与气动载荷的关系：

$$\Delta\alpha_i + \alpha_w = \frac{k_p b_3}{k_p b_3 + b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)} \alpha_w$$

对于上述两式， $k_2b_3 - k_3b_2 > 0, g_2 > 0 [b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)] > 0$ ，使得分母变大，从而使得  $|\Delta\alpha_i + \alpha_w|$  以及  $|\delta_\varphi|$  变小，箭体内气动弯矩以及控制弯矩降低，载荷降低。

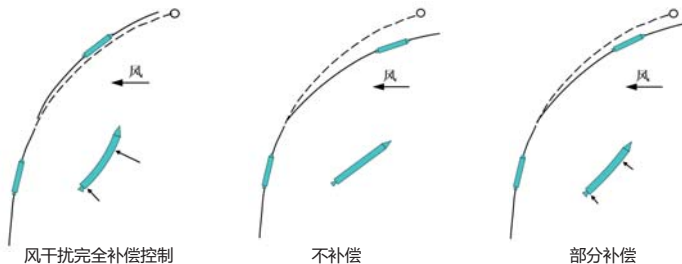
当载荷减小时，姿态角跟踪误差会变大：

$$|\Delta\varphi| = \left| \frac{-[b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)]}{k_p b_3 + b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)} \right| |\alpha_w| = \left( 1 - \frac{k_p b_3}{k_p b_3 + b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)} \right) |\alpha_w|$$

对于上式，当  $k_2b_3 - k_3b_2 > 0, g_2 > 0$  时，当  $[b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)] > 0$ ，使得等式右边变大，所以  $|\Delta\varphi|$  变大，姿态角偏差变大。

加速度表反馈控制

- 利用加速度表中隐含的风干扰信息进行干扰补偿，消除风干扰带来的姿态角偏差。但会造成火箭承受过大的力矩载荷，所以通常，也会利用加速度表控制载荷。



- 小姿态角偏差
- 大载荷
- 大姿态角偏差
- 小载荷
- 中等姿态角偏差
- 中等载荷

问题：如何减小载荷？

- 考虑箭体所受载荷情况。实际飞行过程中，气动载荷和气流攻角，也就是与  $\Delta\alpha_i + \alpha_w$  有关，短周期内  $\Delta\varphi = \Delta\alpha_i$ ，所以有：

$$\Delta\varphi + \alpha_w = \Delta\alpha_i + \alpha_w = \frac{k_p b_3}{k_p b_3 + b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)} \alpha_w$$

根据短周期运动方程  $\Delta\ddot{\varphi} + b_1\Delta\dot{\varphi} + b_3\delta_\varphi = -b_2(\Delta\alpha_i + \alpha_w)$ ，忽略动态项后得：

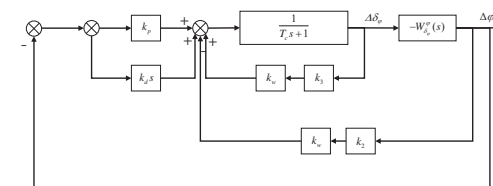
$$\delta_\varphi = -\frac{b_2}{b_3}(\Delta\alpha_i + \alpha_w)$$

故与摆角（控制载荷）的关系有：

$$\delta_\varphi = \frac{-k_p b_2}{k_p b_3 + b_2 + g_2(k_2b_3 - k_3b_2)} \alpha_w$$

风干扰补偿控制 (4)

考虑加速度表反馈的控制框图：



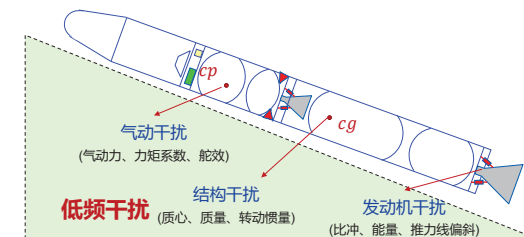
系统闭环特征多项式如下：

$$D(s) = T_c s^3 + (b_1 T_c + 1 - g_2 k_3) s^2 + (b_2 T_c + b_1 - b_1 k_3 g_2 + b_3 k_d) s + (b_2 - b_2 k_3 g_2 + b_3 k_2 g_2 + b_3 k_p)$$

系统稳定的条件为三个括号内均大于零，则可以通过合理配置  $k_p, k_d, g_2$ ，在实现系统稳定的同时，完成载荷的控制以及姿态角跟踪误差的权衡。

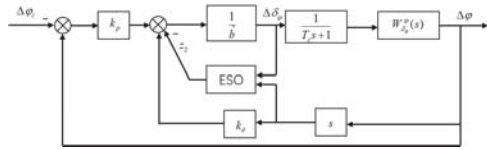
低频外干扰

- 除了风干扰外，低频干扰还包括发动机推力偏斜，气动参数不准等其他缓变干扰，如果去掉积分环节，则无法消除这部分干扰带来的稳态误差。



✓ 如何消除上述的外干扰误差？

在控制回路中加入**扩张状态观测器(ESO)**, 对干扰进行在线估计, 同时在控制量的计算中将消除估计的干扰力矩, 以下为**角速度回路**中加入ESO的控制框图:



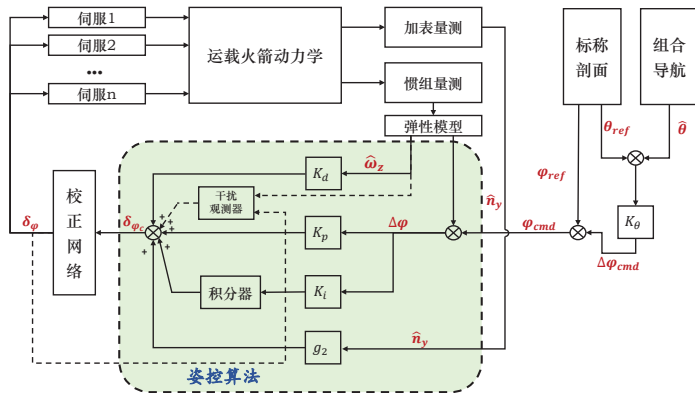
$$\Delta\ddot{\phi} = -b_3\Delta\delta_\phi - b_1\Delta\dot{\phi} - b_2\Delta\alpha + \bar{M}_z$$

令  $f = -b_1\Delta\dot{\phi} - b_2\Delta\alpha + \bar{M}_z$ , 称为总干扰, 是想要消除的部分, 系统状态方程写为:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\delta_\phi$$

对上述系统设计状态观测器:

### 姿态控制器框图



### 目录

1. 火箭姿态控制的性能指标
2. 姿态控制器设计
3. 控制系统鲁棒性分析
4. 可用带宽

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\delta_\phi + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} (\Delta\phi - z_1)$$

其中:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} z_1 = \Delta\phi \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = f = -b_1\Delta\dot{\phi} - b_2\Delta\alpha + \bar{M}_z \end{cases}$$

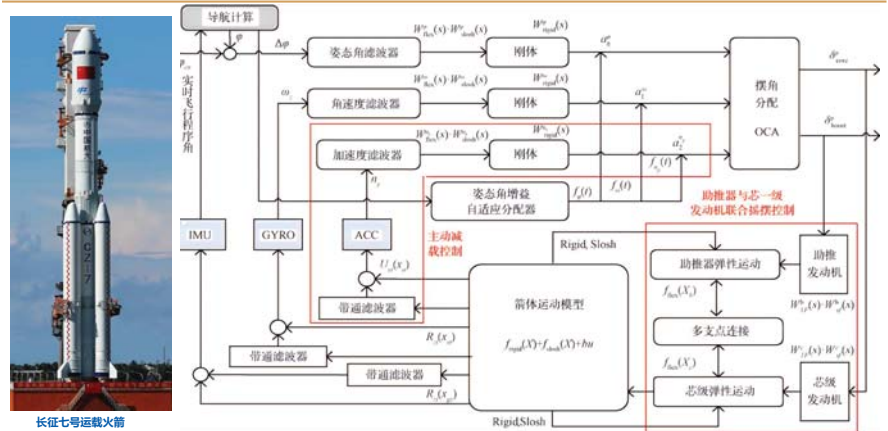
在估计出总扰动  $f$  后, 在控制量的计算中将消除估计的干扰力矩, 并设计如下姿态控制规律:

$$\Delta\delta_\phi = \frac{1}{-b_3} (k_p\Delta\phi + k_d\Delta\dot{\phi} - z_2)$$

得到期望的闭环系统:

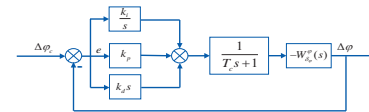
$$\Delta\ddot{\phi} = k_p\Delta\phi + k_d\Delta\dot{\phi} + (f - z_2)$$

### 长征7号姿态控制系统



### 姿态控制系统的鲁棒性

**鲁棒性:** 当参数 (或结构) 存在某种程度的不确定性时, 系统仍能保证稳定性



基于误差反馈的PID控制方式:

$$\delta_\phi = k_p \Delta\phi + k_d \Delta\dot{\phi} + k_i \int_0^t \Delta\phi dt$$

相应的, 系统开环传递函数:

$$G(s) = \frac{b_3 (k_d s^2 + k_p s + k_i)}{s (T_c s + 1) (s^2 + b_1 s + b_2)}$$

闭环特征方程 (绝对稳定性):

$$D(s) = T_c s^4 + (b_1 T_c + 1) s^3 + (b_2 T_c + b_1 + k_d b_3) s^2 + (b_2 + k_p b_3) s + k_i b_3$$

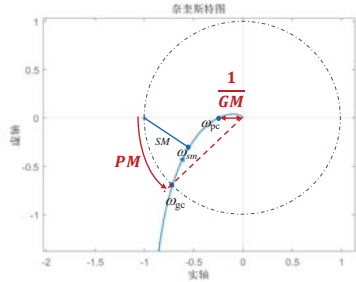
✓ 在进行稳定性分析时, 使用了系数“冻结”法将火箭姿态运动简化为线性时不变系统, 而在实际飞行中, 模型的系数存在摄动。此外, 还忽略了其他高阶模型, 带来模型的结构不确定性。



鲁棒性 (相对稳定性)

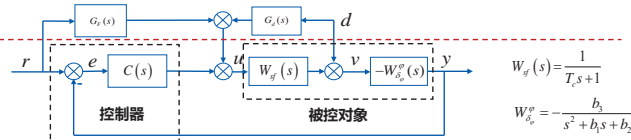
鲁棒性可以表征系统适应参数 (或结构) 变化的能力。在频率法分析框架中, 描述系统的鲁棒性指标主要包括**稳定裕度(SM)**、**幅值裕度(GM)**、**相位裕度(PM)**。

控制系统首先必须是稳定的。此外, 还应该有相当的鲁棒性, 才能在工程上实际可用。



- **稳定裕度(SM):** 奈奎斯特曲线到临界点(-1,0)的最短距离。
- **幅值裕度(GM):** 在闭环系统变得不稳定之前, 环路传递函数的增益可以增加的最大量。图中 $\omega_{gc}$ 对应的幅值的倒数。
- **相位裕度(PM):** 在闭环系统变得不稳定之前, 环路传递函数的相位滞后量。图中 $\omega_{gc}$ 对应的相角距离-180°的相位差,  $\omega_{gc}$ 为系统的截止频率。

灵敏度函数 (1)



$$W_y(s) = \frac{1}{T_c s + 1}$$

$$W_d(s) = -\frac{b_3}{s^2 + b_2 s + b_1}$$

灵敏度函数可以表示反馈 (闭环) 对开环的影响:

$$\left(\frac{y}{r}\right)_{\text{开环}} = -C(s)W_y(s)W_d(s), \quad \left(\frac{y}{r}\right)_{\text{闭环}} = \frac{-C(s)W_y(s)W_d(s)}{1-C(s)W_y(s)W_d(s)} \Rightarrow \left(\frac{y}{r}\right)_{\text{闭环}} = \frac{1}{1-C(s)W_y(s)W_d(s)} \left(\frac{y}{r}\right)_{\text{开环}}$$

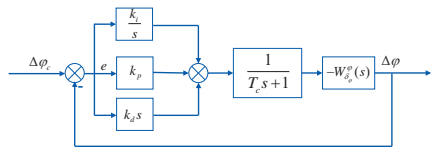
对于输入  $r$ , 与干扰  $d$  以这两个信号为输入, 回路中各信号的传递矩阵关系如下 (不考虑前馈通路):

$$\begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_y C & \frac{1}{1-CW_y W_d} \\ \frac{1}{1-CW_y W_d} & W_y W_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$$

上述关系中, 输入信号经过反馈回到原处的传递函数  $\frac{e(s)}{r(s)}, \frac{v(s)}{d(s)}$  也是  $\frac{1}{1-CW_y W_d}$

算例: 姿控系统鲁棒性分析 (1)

对于俯仰通道姿态控制系统:



将参数  $T_c = 0.005, b_1 = 0, b_2 = -9.1, b_3 = 5.1$  代入, 根据闭环特征方程:

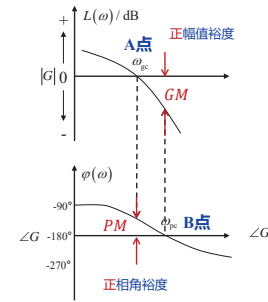
$$D(s) = T_c s^4 + (b_1 T_c + 1) s^3 + (b_2 T_c + b_1 + k_d b_3) s^2 + (b_2 + k_p b_3) s + k_i b_3$$

根据林纳德-奇帕特判据, 得到系统稳定的条件为:

$$\begin{cases} b_2 T_c + k_d b_3 > 0 \\ b_2 + k_p b_3 > 0 \\ k_i b_3 > 0 \\ k_d / k_p > T_c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_p > 1.80 \\ k_d > 0.009 \\ k_i > 0 \\ k_d / k_p > 0.005 \end{cases}$$

稳定裕度

系统的幅、相稳定裕度可以用开环传递函数的伯德图来确定。



➢ 开环幅值为0dB(A点)的频率称之为截止频率 $\omega_{gc}$ , 截止频率处的相位为 $\varphi_c$ , 相位裕度PM定义为

$$\omega_{gc}$$

➢ 开环相位穿越-180°(B点)的频率称之为相位穿越频率 $\omega_{pc}$ , 幅值裕度GM定义为:

$$GM = 20 \lg \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$$

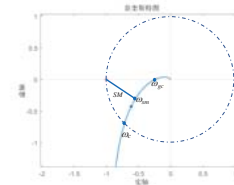
- ◆ 相位裕度越大, 系统越“稳”, 但响应越慢, 快速性欠佳。
- ◆ 良好的系统一般控制在: **相位裕度40°左右, 幅值裕度应大于6dB。**

灵敏度函数 (2)

灵敏度函数的意义

$\frac{e(j\omega)}{r(j\omega)}$  表示误差与输入的比值,  $\frac{v(j\omega)}{d(j\omega)}$  表示干扰进入闭环系统后的放大倍数, 显然这些值越小越好。所以, 灵敏度既是稳态误差的度量, 也是抗扰性的度量,  $|S(j\omega)|$  越小越好。

灵敏度与稳定裕度的关系 (假设单位负反馈的开环传函为 $G(s)$ )



灵敏度函数的倒数  $\left|\frac{1}{S}\right| = |1+G|$  就是Nyquist曲线 $G(j\omega)$ 到(-1,0)的距离, 因此有:

$$\left|S(j\omega)\right|_{\max} = \frac{1}{SM}$$

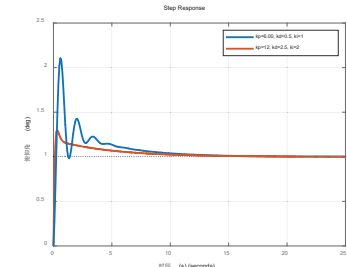
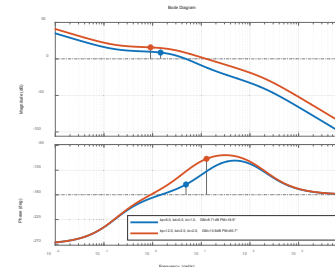
灵敏度极大值越大, 系统稳定裕度越低。

✓ 灵敏度极大值越小, 其各项指标越优异, 但灵敏度的最小值也有 (可用带宽) 限制

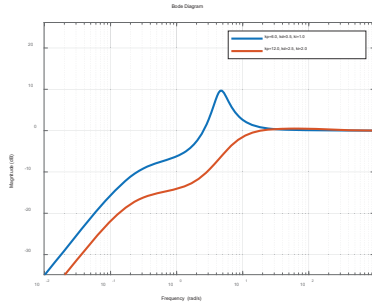
算例: 姿控系统鲁棒性分析 (2)

选取满足绝对稳定性条件的两组参数如下:

$$\begin{cases} k_{p1} = 6.0, k_{d1} = 0.5, k_{i1} = 1 \\ k_{p2} = 12.0, k_{d2} = 2.5, k_{i2} = 2 \end{cases}$$



灵敏度函数图



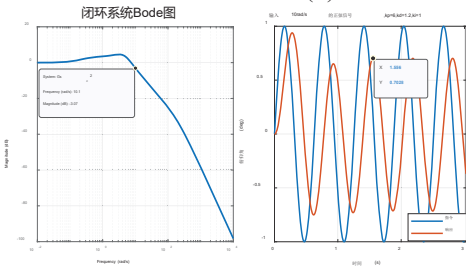
下面，采用对灵敏度函数整形的方法设计火箭姿态控制器

回顾：控制系统的带宽

带宽 (控制系统准确复现输入信号的能力)

系统的带宽指闭环系统的Bode图中，对应的幅频特性曲线下降到频率为零时的分贝值-3dB所对应的频率，即系统对高于带宽的输入信号有衰减作用，衰减的幅度不小于：

$$20 \lg \left( \frac{y}{r} \right) = -3 \implies \frac{y}{r} = 0.7079$$



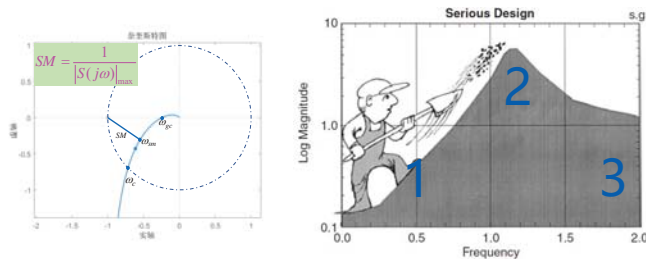
实际工程中，高带宽意味着高成本。高带宽虽然能使跟踪速度提高，但也带来很多问题：

- a) 对执行机构的品质要求提高；
- b) 激励了对象的高频动态(弹性等)使控制问题复杂；
- c) 闭环系统的稳定裕度下降，对相位滞后和时间延迟更敏感；
- d) 对传感器噪声更敏感。

采用灵敏度函数设计控制系统 (1)

设计策略：在满足Bode积分的前提下，设计一种控制器，具有：

- ① 在小于系统带宽的区间，具有小灵敏度
- ② 在大于系统带宽的区间，尽量减小灵敏度的峰值  $|S(j\omega)|_{\max}$
- ③ 在频率极大的区间，合理增加敏感度，进而压低最大灵敏度，增大稳定裕度



- 1. 火箭姿态控制的性能指标
- 2. 姿态控制器设计
- 3. 控制系统鲁棒性分析
- 4. 可用带宽

★ 控制系统设计的“守恒定律”

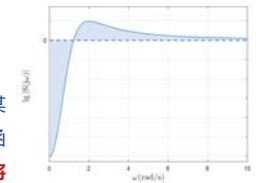
伯德积分 (Bode Integrals)

对于有限带宽的系统，其灵敏度函数 S(s) 满足下述积分公式：

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \int_0^{\infty} \ln \frac{1}{|1+G(j\omega)|} d\omega = \pi \sum P_k$$

式中， $P_k$  是开环传递函数  $G(s)$  的不稳定极点。上式表明，如果在某些频率上灵敏度函数变小了，那么在另外一些频率上一定有灵敏度函数增大。这意味着如果干扰衰减在一个频段得到了改善，那么它必将在另一个频段上变差。若系统没有不稳定极点，那么上式简化为：

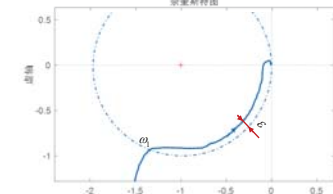
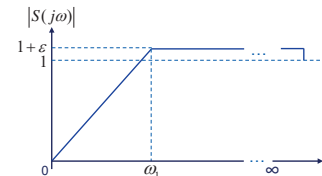
$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = 0$$



采用灵敏度函数设计控制系统 (2)

问题：在满足Bode积分的前提下，能否采用策略：在无限的频带增加敏感度从而压低最大灵敏度的，增大稳定裕度？将Nyquist曲线和灵敏度曲线整形如下：

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+G(j\omega)} \right| = 1 + \epsilon, \quad \omega > \omega_1 \implies |1+G(j\omega)| = \frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon, \quad \omega > \omega_1$$



上述整形策略要求开环传函在高频不能简单地幅值衰减，必须以非常精确的方式衰减。

可物理实现的系统特征：在某一带宽之外不会表现出良好的频率响应保真度，因此精确地衰减高频开环传函是做不到的。

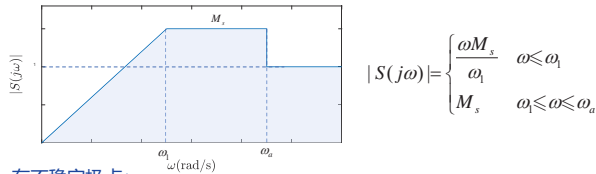
可用带宽  $\omega_a$ : 系统具有高保真度的频率响应的带宽范围

- 被控对象中的未建模动态、数字控制器实现、功率限制、非线性以及其他因素，会造成系统在可用带宽以外的响应与设计控制器时用到的设计模型不符。
- 超出可用带宽，只能保证开环传函幅值衰减得足够快，不能精确地获得响应模型。

问题: 可用带宽与系统带宽的关系? 期望的可用带宽越大越好, 还是越小越好?

- 火箭传感器:** 陀螺仪和加速度计, 通常用于稳定内回路, 它们的可用带宽通常可以用-3dB截止频率表示, 约为120rad/s
  - 火箭执行机构:** -3dB 截止频率约为80rad/s, 通过其自身的反馈回路后表现为110rad/s的一阶环节。
  - 火箭控制器:** 数字计算机系统以200Hz 计算指令, 此计算速率支持以90~150 rad/s速率高保真地传输信号。
  - 箭体:** 在低频时是刚性的, 在高频时产生弯曲振动。比如, 本课程所用火箭一阶振型频率为10Hz (70rad/s), 超出此频率后很难保真
- ✓ 综上, 本课程所用火箭可用带宽选为70rad/s

姿态控制设计的“守恒定律” (1)



在最大动压处  $b_1 = 0, b_2 < 0$ , 有不稳定极点:

$$p = \sqrt{-b_2} \quad W_p^o = -\frac{b_3}{s^2 + b_1 s + b_2}$$

根据Bode积分限制可计算出  $M_s$ :

$$\int_0^{\omega_a} \ln |S(j\omega)| d\omega = \int_0^{\omega_1} \ln \frac{\omega M_s}{\omega_1} d\omega + (\omega_a - \omega_1) \ln M_s = \pi p = \pi \sqrt{-b_2}$$

$$M_s = \exp \frac{\pi \sqrt{-b_2} + \omega_1}{\omega_a}$$

✓ 系统的可用带宽增加, 敏感度极大值下降, 稳定裕度增加

人能否控制火箭的姿态? (1)

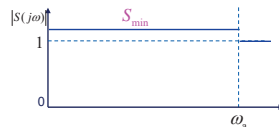
根据Bode积分公式, 灵敏度函数满足:

$$\int_0^{\omega_a} \ln |S(j\omega)| d\omega = \sqrt{-b_2} \pi + \delta$$

考虑到  $\delta$  为一小量, 由积分不等式  $\omega_a \cdot \ln |S(j\omega)|_{\max} > \int_0^{\omega_a} \ln |S(j\omega)| d\omega \approx \sqrt{-b_2} \pi$ , 得到:

$$|S(j\omega)|_{\max} > \exp \frac{\sqrt{-b_2} \pi}{\omega_a} := S_{\min}$$

$S_{\min}$ 的直观含义为: 在可用带宽内, 若灵敏度为常值, 则该常值等于  $S_{\min}$ 。如下图所示:



□ 根据稳定裕度与灵敏度的关系, 上式表明: 系统稳定裕度会随着  $|b_2|$  的增大而减小; 随可用带宽的增大而增大。

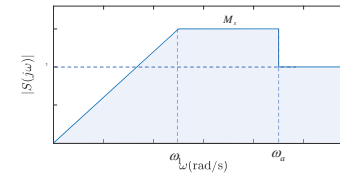
当频率大于可用带宽后, 灵敏度将很快收敛于1, 伯德积分简化:

$$\text{开环传递函数稳定: } \int_0^{\omega_a} \ln |S(j\omega)| d\omega = \delta$$

$$\text{开环传递函数不稳定: } \int_0^{\omega_a} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{p \in P} \text{Re}(p) + \delta$$

式中  $p$  为开环不稳定极点,  $\delta$  为  $\omega_a$  以外的积分量, 为一小量。

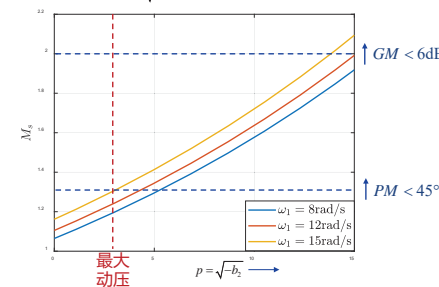
✓ 在伯德积分和可用带宽的限制下, 为了最小化灵敏度, 期望的形状如下:



此灵敏度曲线表示系统在  $\omega_1$  以下有较低灵敏度 (良好的性能), 在  $\omega_1 \sim \omega_a$  有不大于  $M_s$  的灵敏度。

姿态控制设计的“守恒定律” (2)

下图表示了  $M_s$  与  $\omega_1 \sqrt{-b_2}$  的关系, 考虑到稳定裕度之间的近似关系, 有:



$$M_s = \exp \frac{\pi \sqrt{-b_2} + \omega_1}{\omega_a}$$

$$SM = \frac{1}{M_s}$$

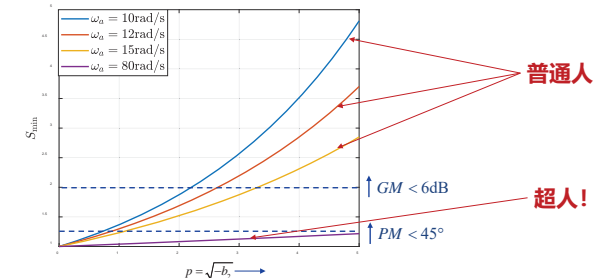
$$PM \approx 2 \sin^{-1}(1/2M_s)$$

$$GM \approx 20 \lg \left( \frac{M_s}{M_s - 1} \right)$$

- 随着不稳定根的右移, 敏感度极大值增加, 系统的裕度会逐渐降低
  - 系统带宽的提高, 敏感度极大值增加, 系统的裕度会逐渐降低
- ◆ 经验: 可用带宽是不稳定极点的十倍以上。

人能否控制火箭的姿态? (2)

✓ 人的可用带宽受限于人的视觉响应、神经和肌肉延迟等复杂因素, 约为10~15rad/s。就此估算, 得到  $S_{\min}$  与火箭点的关系图:



□ 当不稳定极点大于一定值时, 人无法保证足够的控制裕度, 也就无法实现姿态控制。主要原因是, 人的可用带宽较小, 导致灵敏度的极大值大, 相应的控制裕度有限。